目　录

第一章 对 策 论

在我们生活的社会中，常常可以观察到各种各样带有竞争性质的现象。例如，日常生活中的下棋、打牌、球赛及其他各种体育竞赛和某些游戏；经济领域内的广告与销售活动，贸易谈判，价格竞争，生产管理；政治领域内的谈判策略；军事领域内的进攻与防御，战略与战术等等。这些现象的特征是冲突双方始终处于一种竞争或对抗状态中，并且由于参与竞争的双方各自采取不同策略的组合而得到不同的结果。这种带有竞争性质的现象我们称之为对策现象，或简称为对策。对策现象虽然早已为人们所关注，但最初将其抽象为策略的数学理论，则是在1921 年由E Borel作出的，1928 年 J.V.Neumann 证明的最大最小值定理首次揭示了对策现象的一个基本特性。在二次大战期间，由于在军事和生产中提出了许多对策问题，从而使对策现象成为许多数学家研究的对象。在获得了一系列的成果后，形成了数学的一个新的分支—对策论。1944 年 J.V.Neumann 和 O.Morgenstern 合著的《对策论与经济行为》一书问世，使对策论的数学理论更加系统和完善，同时也受到了各方面的充分重视。目前对策论在政治、经济和军事活动中已得到了广泛的应用，从而成为运筹学的一个重要组成内容。

§1.1 对策现象的基本要素

对策论是研究在对策现象中，参加者为争取获胜应作何种决策的数学理论和方法。为此，我们首先通过几个实例来阐明对策

现象中的基本要素是什么，然后再来介绍其有关的数学理论和方法。

例1.1 两家公司为分享某种产品的市场，正在各自拟定下一年的销售计划，以便扩大销售量（该产品的市场需求量设为定数，一家扩大销售量，另一家必减少销售量）。每家公司都在考虑用三种不同的办法来扩大自己的销售量，即：（1）改进包装；（2）加强广告宣传；（3）适当削价。这三种办法所需费用大体相当，而根据公司财力每家公司只能在这三种办法中选用一种。各种办法的组合对于公司Ⅰ销售增长的百分点如表1-1（表中正数表示公司Ⅰ销售增长数，同时也是公司Ⅱ销售减少数；负数表示公司Ⅰ销售减少数，同时也是公司Ⅱ销售增长数）。问各公司在不知道对方采用哪种办法之前，如何作出自己的决策？

表 1-1

销售增长 / 公司Ⅱ / 公司Ⅰ	1	2	3
1	-3	1	2
2	1	2	1
3	1	0	-2

例1.2 设某机关在秋初便要决定冬季取暖用煤的贮藏量问题。考虑到在正常的冬季气温下该机关要耗煤15吨，但在较暖与较冷的冬季则要分别耗煤10吨与20吨。假设煤的价格随着冬季寒冷程度而有所变动，并设在较暖的、正常的与较冷的冬季气温下每吨煤分别为10元、15元与20元。又设在秋初煤的价格是每吨10元。试问在没有关于当年冬季的准确气象预报条件下，该机关在秋初应买进多少吨煤才较合理？

如果我们将该机关采购员与大自然看作对策现象中的冲突双方，则机关采购员在秋初显然有三种不同的方案供选择，它们依次为（1）购进10吨；（2）购进15吨；（3）购进20吨。而

大自然在未来的冬季显然也面临着三种不同的气候状态，它们依次为（1）较暖的冬季；（2）正常气温的冬季；（3）较冷的冬季．考虑到该机关在冬季取暖用煤实际所耗的费用应等于秋初购进煤所耗费用加上冬季供煤不足时再补购煤所耗费用之和．因而对于冲突双方的每一种方案组合，可以得到该机关的支付费用表1-2(表中各负数表示机关付出的费用)．

表 1-2

机关购煤方案 \ 支付费用 \ 大自然气温状态	较暖	正常	较冷
(1)	-100	-175	-300
(2)	-150	-150	-250
(3)	-200	-200	-200

例 1.3 B上校和他的敌人都打算适当地分配自己的兵力去占领两个据点．假设B上校有四个团的兵力，敌方有三个团的兵力，双方都把这些兵力分配到两个据点去．B上校有五种不同的方案来分配他的四个团的兵力，敌方有四种不同的方案来分配其三个团的兵力．双方各种兵力分配方案的组合对B上校来说其得失如表1-3．问B上校在不知道对方兵力分配的情况下，用何种方案分配自己的兵力，方能最好完成任务？

表 1-3

上校所用方案 \ 上校得失 \ 敌方案	(3, 0)	(0, 3)	(2, 1)	(1, 2)
(4, 0)	4	0	2	[illegible]
(0, 4)	0	4	1	2
(3, 1)	1	-1	3	[illegible]
(1, 3)	-1	1	0	3
(2, 2)	-2	-2	2	2

由上述各例可以看出，在各种各样的对策现象中，它们有着共同的要素。这些要素就是局中人、策略和支付，以下来逐一介绍。

（一） 局中人

一场竞争（称为一局对策）的参加者，称为局中人。如例1.1中的公司Ⅰ和公司Ⅱ、例1.2中的机关与大自然、例1.3中的B上校和他的敌人，都是局中人。显然，局中人理所当然的是对策论的基本要素，因为如果没有参加者，就不会出现竞争或斗争现象，因此也就没有对策现象。但要注意的是局中人通常指的是有决策权的参加者，而不是既无决策权且与结局无关的人。局中人也不能只理解为一个人，他可以广义地理解为利害一致的集团、公司、球队等。局中人还可以视为自然界，如气候、病虫害、自然环境等等。

对策现象依局中人的多少而分为一人对策、二人对策、多人（n人，$n\geqslant 3$）对策。所谓n人对策并非指这种对策现象恰好有n个人参加，而是按照利害冲突，一切参加者都必须被分在n个互斥的集体里（每个人只能属于一个集体）。每个集体都具有共同的利益，而不同的集体利害关系不同。于是，这n个利害不一致的集体即可看作n个局中人。如玩桥牌，虽然有四个人参加，但因南北两方利益一致，应视为一个局中人，东西两方也视为一个局中人。因此桥牌属于二人对策。

考虑到一人对策即为通常意义下的最大化问题，因此，不管这个人进行选择的方案为有限个或无限个，都可以用初等数学或微积分等工具来解决。因此，对策论只考虑二人以上对策。

（二） 策略

局中人在一局对策中为对付对方而采取的一个可行的、自始至终通盘筹划的行动方案，称为策略。策略也可以理解为局中人在一场竞争中所采取的一个从头到尾的全部完整的计划方案。由

此所见，一个策略并非局中人在一场竞争中的某一步行动方案，或每步临时作出的决定。如在二人对策的象棋比赛中，甲方采用"当头炮"就不能称为这是甲方的一个策略，因为它只是甲方策略中的一个组成部份，我们把它叫做一个"着"，而一个策略则可能包含着有限个"着"。在一局对策中，局中人的一个策略有时要分成几个阶段去完成，我们把这种阶段叫做局中人的"步"。局中人的一个策略只能为有限步，而每一步只允许包含有限个着。局中人的策略的全体称为这个局中人的策略集。当然，在一局对策中，每个局中人的整个行动方案也可以只取一步，且一步中只取一着，如在例 1.1 中局中人Ⅰ（公司Ⅰ）的策略有三个，它们分别是（1）改进包装，（2）加强广告宣传，（3）适当削价。若分别用代码 1，2，3 来表示，则局中人Ⅰ（公司Ⅰ）的策略集为{1，2，3}，类似地局中人Ⅱ（公司Ⅱ）的策略集为{1，2，3}。此外，对策现象按照局中人策略的个数还可分为：有限对策与无限对策，其中各局中人的策略均只有有限个（或策略集为有限元集）的对策称为有限对策，而局中人的策略有无限个（或策略集为无限元集）的对策称为无限对策。如例 1.1 和例1.2 中每个局中人的策略集均为有限元集故为有限对策，但在经济领域中由价格竞争所出现的对策现象，因为出台的价格多种多样，所以作为策略可以有无限多个，即局中人的策略集为无限元集，因而此种对策现象为无限对策。

我们把每个局中人的策略集中各取一个策略所组成的策略组称为一个"局势"。如例 1.1 中一局对策的局势有 9 个，它们分别是（1，1），（1，2），（1，3），（2，1），（2，2），（2，3），（3，1），（3，2），（3，3）。

（三）支付

一局对策结束后，局中人所获得的结果，称为支付（又称得失，赢得）。对于每个局中人来说，可以是按照某种确定的竞争

规则得了多少或失了多少，也可以是胜利了或失败了，也可以是收入多少（赢了）或支出多少（输了）等等。一局对策结束时每个局中人的支付显然是每个局中人策略的函数，也就是局势的函数。因此，也可以把支付称为支付函数。支付函数可用$A(x, y)$来表示，如例1.1中$A(1, 2)=1$表示在一局对策中，当局中人Ⅰ采用策略1，同时局中人Ⅱ采用策略2时，局中人Ⅰ所得到的销售增长额为1%；$A(3, 3)=-2$表示在一局对策中，当局中人Ⅰ采取策略3，同时局中人Ⅱ采取策略3时，局中人Ⅰ的销售减少额为2%。如果在任一局势中所有局中人支付相加总是零，则称这种对策为零和对策，否则称为非零和对策。经济领域中的对策现象有不少是非零和的，这是因为一个经济过程总是要增加（或减少）财富。

§1.2 矩阵对策

矩阵对策又称二人零和有限对策。这种对策模型虽然是简单的，但它确是非常重要的，因为一些复杂的对策模型都可转化为矩阵对策来求解。

由上述定义可知矩阵对策的局中人只有两个，我们分别用P_1、P_2来表示，每个局中人都只有有限个策略可供选择（为了和后面的概念区别，我们把这里的策略称为纯策略）。设P_1的纯策略有m个，用α_1，α_2，…，α_i，…，α_m来表示，P_2的纯策略有n个，用β_1，β_2，…，β_j，…，β_n来表示。我们用S_1表示局中人P_1的策略集，S_2表示局中人P_2的策略集，则

$$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m\}$$
$$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_j, \cdots, \beta_n\}$$

由于对策是零和的，因此在一局对策结束时，局中一人的收入必等于局中另一人的支出。

在本章中我们假定，局中人的每个策略只需一个阶段即可完成，因此每个策略只有一步。

由于在矩阵对策中，局中人 P_1 和局中人 P_2 的纯策略均只有有限个，故该对策的支付函数特殊地可用一个矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

来表示。其中 a_{ij} 表示当局中人 P_1 取纯策略 α_i，同时局中人 P_2 取纯策略 β_j 时局中人 P_1 的支付数（$a_{ij}>0$ 时表示 P_1 收入，$a_{ij}<0$ 表示 P_1 支出）。我们以后称 A 为局中人 P_1 的支付矩阵或赢得矩阵，如果把 A 矩阵中的所有元素都换成它的相反数，则它就是局中人 P_2 的支付矩阵。

对于一个矩阵对策而言，只要给定了 P_1 或 P_2 的一个支付矩阵，就给出了一个具体的对策现象，我们所要研究的典型问题是：在此对策现象中，局中人如何选择一个好的策略，使其赢得要比采取其它策略时赢得为多。

一般情况，若局中人 P_1 的支付矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

或 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则局中人 P_2 的支付矩阵为 $A^*=(-a_{ij})_{m\times n}$。它表明局中人 P_1 有 m 个纯策略 α_1，α_2，…，α_m，或 P_1 有策略集 $S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$；局中人 P_2 有 n 个纯策略 β_1，β_2，…，β_n，或 P_2 有策略集 $S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$。对任一局势 (α_i, β_j)（即局中人 P_1 选纯策略 α_i，局中人 P_2 选纯策略 β_j 所构成的局势），局中人 P_1 根据支付矩阵 A 从局中人 P_2 处收入 a_{ij}。我们把这个矩阵对策简记为 $G=\{S_1, S_2, A\}$。

（一）具有鞍点的矩阵对策和最优纯策略

为了阐明鞍点的概念，我们首先来观察如下例子。

例 1.4 设给定对策 $G=\{S_1, S_2, A\}$，其中 $S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$，局中人 P_1 有支付矩阵

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

G 也可写成表 1-4。

表 1-4

A P_2 / P_1	β_1	β_2	β_3	β_4
α_1	-5	3	1	20
α_2	5	5	4	6
α_3	-4	-2	0	-5

观察 P_1 的支付矩阵 A 可以看出，局中人 P_1 的最大赢得是 20，P_1 要赢得 20 就应选择纯策略 α_1。然而，与此同时局中人 P_2 根据支付矩阵也在考虑，他根据 P_1 想赢得 20 这种心理状态就决定选用纯策略 β_1，这样可使局中人 P_1 不但不能赢得 20 反而要支出 5。同样，局中人 P_2 根据支付矩阵 A 想赢得最大值 5，就应选用纯策略 β_1 或 β_4，此时局中人 P_1 也可采取选纯策略 α_2 或 α_1 来对付 P_2，使 P_2 反而支出 5 或 20。所以，如果局中人 P_1 与 P_2 都是冷静的而又不冒险的话，则稳妥的做法应该是从最坏的情形中去选择一种最好的结果。例如对局中人 P_1 而言，他的最坏情形是取矩阵 A 中各行的最小元素，它们分别是 -5，4，-5。由于在这些最坏情形中的最好结果是 4，因此，局中人 P_1 只要选出纯策略 α_2 就可以不管局中人 P_2 选用哪个纯策略，他的收入都不会少于 4。同样，局中人 P_2 的最坏情形是取矩阵 A 中各列的最大元素，它们分别是 5，5，4，20。在这些最坏

情形中的最好者也是4，也就是只要局中人P_2选择纯策略β_3，不管局中人P_1选择哪个纯策略，他的支出都不会多于4．因此只要局中人P_1，P_2都不存在侥幸心理去冒风险的话，就应该分别选取纯策略α_2和β_3，这两个纯策略对局中人P_1，P_2来说都是最稳妥的，否则就有可能更吃亏。

在一般情况下，若给定对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则仿照前面的分析过程可知为求取上述意义下的解，则对局中人P_1而言应选取支付矩阵A的各行中最小元素的最大者，即计算$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$。这种计算的含意是局中人$P_1$在纯策略集$S_1$中采用任一纯策略$\alpha_i$时，他的收入至少是$\min\limits_j a_{ij}$，而局中人$P_1$可通过选择$i$来寻找其中最好的纯策略$\alpha_i$，以使他收入至少可得$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$。同样，对局中人$P_2$而言，就应选取$A$的各列中最大元素的最小者，即计算$\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$。它的含意是局中人$P_2$在纯策略集$S_2$中采用任一纯策略$\beta_j$时，他的支出至多是$\max\limits_i a_{ij}$。而局中人$P_2$也可通过选择$j$来寻找其中最好的纯策略$\beta_j$。若局中人$P_1$的最好纯策略为$\alpha_{i^*}$，局中人$P_2$的最好纯策略为$\beta_{j^*}$，则局势$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$所决定的支付为$a_{i^*j^*}$。显然，对任意的$i$，$j$，有不等式$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}$成立。于是有

定义 1.1 对于矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，若存在这样的纯策略α_{i^*}，β_{j^*}，使其构成的局势（α_{i^*}，β_{j^*}）有$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j}$，对$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$均成立，则称局势（$\alpha_{i^*}$，$\beta_{j^*}$）为对策$G$在纯策略意义下的解。$\alpha_{i^*}$，$\beta_{j^*}$分别称为局中人$P_1$，$P_2$的最优纯策略，局中人$P_1$的支付$a_{i^*j^*}$称为对策$G$的值，记为$V_G$。相应的正整数对（$i^*$，$j^*$）称为矩阵$A$的鞍点，由$A$构成的对策称为具有鞍点的矩阵对策。

显然，矩阵对策有解，其支付矩阵A必有鞍点，反之，若支付矩阵A有鞍点（i^*，j^*），则对策的解就是鞍点（i^*，j^*）所对应的最优纯策略α_{i^*}，β_{j^*}所组成的局势（α_i^*，β_j^*）。对策的值V_G也就是支付矩阵A中鞍点（i^*，j^*）所对应的元素$a_{i^*j^*}$，它既是矩阵A的i^*行中的最小元素，同时又是j^*列中的最大元素。利用上述特性，可以用来求解一些简单的矩阵对策。例如，若在给定矩阵对策G的支付矩阵中含有这样的元素a_{ij}，它既是i行中的最小者同时又是j列中的最大者，则（i，j）即为A的鞍点，a_{ij}为对策G的值。相应的α_i为局中人P_1的最优纯策略，β_j为局中人P_2的最优纯策略，（α_i，β_j）为对策G的解。

例 1.5 给定矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，局中人$P_1$有支付矩阵

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

由于对策G有鞍点（2，3），所以对策G有解（α_2，β_3）且$V_G=2$。也就是说，若局中人P_1选择最优纯策略α_2，他的收入至少为 2 个单位。局中人P_2选择最优纯策略β_3，他的支出至多也为 2 个单位。这里所说的最优纯策略当然是指在无风险的情况下而言，因为此时即使局中人把自己的最优纯策略公开告诉对方，也不能改变这一局对策的结果。

需要指出的是，并非任何矩阵对策在纯策略意义下都有解。

我们只需观察如下例子即可。

例1.6 设给定矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2\}$，$S_2=\{\beta_1, \beta_2\}$，局中人$P_1$的支付矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

显然在A中不存在这样的元素a_{ij}，使它满足既是i行中的最小元素又是j列中的最大元素，因此对策G无解，即支付矩阵A无鞍点。那么，究竟在什么情况下矩阵对策G在纯策略意义下有解呢？以下定理揭示了矩阵对策G在纯策略意义下有解的本质。

定理1.1 矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$在纯策略意义下有解（或支付矩阵A有鞍点）的充分必要条件是

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}. \tag{1.1}$$

证明 充分性。设$\min\limits_j a_{ij}$在$i=i^*$达到最大，$\max\limits_i a_{ij}$在$j=j^*$达到最小，则

$$\min_j a_{i^*j}=\max_i \min_j a_{ij}$$

$$\max_i a_{ij^*}=\min_j \max_i a_{ij}$$

由条件

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}$$

可得

$$\min_j a_{i^*j}=\max_i a_{ij^*} \tag{1.2}$$

由极小值定义可知

$$\min_j a_{i^*j}\leqslant a_{i^*j^*}$$

故

$$\max_i a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}$$

此即对一切 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 均有

$$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}$$

又根据最大值定义及（1.2）式可得对一切 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 均有

$$a_{i^*j}\geqslant a_{i^*j^*}$$

故对一切 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 均有

$$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j}$$

由定义 1.1 知对策G有解 $(\alpha_{i^*},\ \beta_{j^*})$。

必要性。若对策G有解，由定义 1.1 可知存在 α_{i^*}，β_{j^*}，使 $a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j}$ 对一切 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ \ j=1,\ 2,\cdots,\ n$ 成立，因而

$$\max_i a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant \min_j a_{i^*j} \tag{1.3}$$

由于

$$\min_j\ \max_i a_{ij}\leqslant \max_i a_{ij^*}$$

$$\min_j a_{i^*j}\leqslant \max_i\ \min_j a_{ij}$$

综合（1.3）式和上述二式可得

$$\min_j\ \max_i a_{ij}\leqslant \max_i\ \min_j a_{ij} \tag{1.4}$$

另一方面，又由极大值和极小值定义可知对 $i=1,\ 2,\cdots,\ m,\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 有

$$\min_j a_{ij}\leqslant a_{ij}\leqslant \max_i a_{ij}$$

故对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 有

$$\min_j a_{ij}\leqslant \min_j\ \max_i a_{ij}$$

将上式左端对 i 取 max，则有

$$\max_i\ \min_j a_{ij}\leqslant \min_j\ \max_i a_{ij} \tag{1.5}$$

由（1.4）与（1.5）可得

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$ □

推论1.2 若矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$在纯策略意义下的解为$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$，则对策值$V_G=a_{i^*j^*}$并满足等式

$$a_{i^*j^*}=\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}$$

证明 由于G有解，由定理1.1必要性证明可得

$$\min_j \max_i a_{ij} \leqslant \max_i a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant \min_j a_{i^*j} \leqslant \max_i \min_j a_{ij}$$

再根据定理1.1知G有解的充要条件为上述不等式两端应相等，故

$$a_{i^*j^*}=\min_j \max_i a_{ij}=\max_i \min_j a_{ij}$$ □

例1.7 给定矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$，$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$，局中人$P_1$有支付矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

求对策的解及对策值。

解 经计算易知

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=5$$

故由定理1.1知对策G有解，其解为(α_1, β_2)，(α_3, β_4)，(α_1, β_4)，(α_3, β_2)，对策值$V_G=5$。

观察例1.7可知，矩阵对策的解可以不唯一，在具有非唯一解的矩阵对策中有如下两个重要的性质：

（1）对策值的无差别性。若$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$，$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$是对策$G$的两个解，则$a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$。

这可由定理1.1直接推出。

（2）解的可交换性。若$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$，$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$是矩阵对

策G的两个解，则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$，$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是G的两个解。

读者可通过例 1.7 验证这一结果的正确性。一般情形读者可根据定义 1.1 自己证明。

例1.8 求解例 1.1。此矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中$S_1=S_2=$\{改进包装，加强广告宣传，适当削价\}，公司 I 的支付矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

解 经计算有

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=1$$

故由定理 1.1 知对策G有解 (α_2, β_1)。即公司 I 以加强广告宣传为最优纯策略，此时公司 I 的销售增长至少为 1%。公司 II 则应采取改进包装为最优纯策略，这样它的销售损失就不会多于 1%。

读者还可自行证明例 1.2 有解，并有

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=-200$$

即该机关采购员最理智的（最稳妥）的方案是秋初购进 20 吨煤。显然，这个结果与人们的常识上的推理是一致的。

（二）无鞍点的矩阵对策和最优混合策略

我们从例 1.6 已经看到支付矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

的对策由于$\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} \neq \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$，因而对策在纯策略意义下无解。当然支付矩阵$A$也无鞍点，局中人也找不到各自的最优纯策略，因而求不出纯策略意义下的对策值V_G。那么这时局

中人该怎样进行对策呢？注意到

$$\max_i \min_j a_{ij} = 2 < \min_j \max_i a_{ij} = 4$$

它说明局中人 P_1 的收入至少为2，但局中人 P_2 的支出可不多于4。这个差异促使局中人 P_1 尽力使自己收入多于2，而局中人 P_2 则尽力使自己的支出少于4。在这种情况下，假定局中人 P_2 能够发现 P_1 所选取的纯策略，则他将采取 β_2 使 P_1 的收入降为1（若 P_1 采用纯策略 α_1）或者最多收入为2（若 P_1 采用纯策略 α_2，则 P_2 采用纯策略 β_1），这对局中人 P_1 来说当然是十分不利的。同样，若局中人 P_1 能够发现（不管用什么办法）P_2 所采用的纯策略，则可采取同样的措施来迫使 P_2 的支付为4或6，这对 P_2 当然也不利。由此可知，在一局对策中，局中人所采用的纯策略的保密性就显得十分重要了(回忆在有鞍点的矩阵对策中，局中人的最优纯策略并无保密性，在那里局中人即使公开自己的最优纯策略也不会提高或降低他们各自的支付结果)。那么怎样才能使对方无从了解自己所采用的策略呢？最好的办法就是局中人采用随机的办法来选择自己的策略，也就是说在一局对策中，局中人对纯策略的选择采用某种随机装置来决定。例如最简单的方法是通过第四章的计算机模拟法并按照某一概率分布来选取纯策略。这样对方事前就不可能得知我方选择的是哪个纯策略，因为就连我方（局中人）自己事前也不知道，而所选择的纯策略是在最后时刻借助于随机装置选择出来的。

对于例1.6来说，假定局中人 P_1 以概率 x 选择纯策略 α_1，以概率 $1-x$ 选择纯策略 α_2；局中人 P_2 以概率 y 选择纯策略 β_1，以概率 $1-y$ 选择纯策略 β_2。于是对于局中人 P_1 来说他的收入度量应是数学期望 $E(x,\ y)$，并可求得

$$E(x,\ y) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i y_j$$

$$= 6xy + x(1-y) + 2(1-x)y$$

$$+4(1-x)(1-y)$$

$$=7\left(x-\frac{2}{7}\right)\left(y-\frac{3}{7}\right)+\frac{22}{7} \qquad (1.6)$$

将上述思想推广到一般的对策现象中则有

定义1.2 对给定的矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$，局中人$P_1$有支付矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，我们把纯策略集$S_1$，$S_2$上对应的概率向量$X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)\left(其中 x_i\geqslant 0，i=1，2，\cdots，m，\sum_{i=1}^{m} x_i=1\right)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\left(其中 y_j\geqslant 0，j=1，2，\cdots，n，\sum_{j=1}^{n} y_j=1\right)$分别称为局中人$P_1$，$P_2$的混合策略，简称策略。$(X，Y)$称为混合局势。我们今后把局中人$P_1$的所有混合策略所成集合记为$S_1^*=\{X\}$，局中人$P_2$的所有混合策略所成集合记为$S_2^*=\{Y\}$。并称期望函数

$$E(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}P(\alpha=\alpha_i, \beta=\beta_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

为局中人P_1的支付（或支付函数）。其中$P(\alpha=\alpha_i, \beta=\beta_j)$表示局中人$P_1$取纯策略$\alpha_i$、局中人$P_2$取纯策略$\beta_j$的概率，并有$P(\alpha=\alpha_i)=x_i$，$P(\beta=\beta_j)=y_j$，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$。显然，纯策略也可看成混合策略的特殊情形。如局中人P_1选取纯策略α_i，它实际上就是采用混合策略

$$X_i=(0, \cdots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0)$$

定义1.3 设矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，X、Y分别为局

中人 P_1、P_2 的策略. $S_1^* = \{X\}$, $S_2^* = \{Y\}$. $E = E(X, Y)$. 则称 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 为 G 的混合扩充.

仿照矩阵对策 G 在纯策略意义下的解的定义，可以得到 G 在混合扩充意义下解的定义如下.

定义1.4 设 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 为矩阵对策 G 的混合扩充. 如果在 S_1^*, S_2^* 中存在这样的混合局势 (X^*, Y^*), 对一切 $X \in S_1^*$, $Y \in S_2^*$ 均有

$$E(X, Y^*) \leqslant E(X^*, Y^*) \leqslant E(X^*, Y) \tag{1.7}$$

则称混合局势 (X^*, Y^*) 为对策 G 在混合策略意义下的解. X^*, Y^* 分别称为局中人 P_1, P_2 的最优（混合）策略. 局中人 P_1 的支付 $E(X^*, Y^*)$ 称为对策 G 在混合策略意义下的值，记为 V_{G^*}.

定义 1.4 的直观意义是：若 X^*, Y^* 为满足 (1.7) 式的策略. 则无论局中人 P_2 选取什么策略 Y，局中人 P_1 总可以利用策略 X^* 使他的期望收入至少为 $E(X^*, Y^*)$. 因此，$E(X^*, Y^*)$ 是 P_1 可得到的最少的期望收入，而局中人 P_2 利用策略 Y^* 可使 P_1 的期望收入最多为 $E(X^*, Y^*)$ 而不管 P_1 选择什么策略 X.

在矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, A\}$ 的混合扩充 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 中，当 S_1^* 与 S_2^* 为有限集时，不妨设 $S_1^* = \{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$, $S_2^* = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$. 则可仿照矩阵对策 G 在纯策略意义下解的讨论，来构造一个新的支付矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$, 使有 $\tilde{a}_{ij} = E(X_i, Y_j)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 从而可根据与定理 1.1 完全类似的证法得到 G^* 有解的充要条件为

$$\min_j \max_i \tilde{a}_{ij} = \max_i \min_j \tilde{a}_{ij}$$

或写成

$$\min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} E(X, Y) = \max_{X \in S_1^*} \min_{Y \in S_2^*} E(X, Y)$$

然而考虑到有

$$\left\{X=(x_1, x_2, \cdots, x_m) \mid x_i \geqslant 0, \ i=1, \cdots, m, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\} = S_1^*$$

$$\left\{Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mid y_j \geqslant 0, \ j=1, \cdots, n, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\} = S_2^*$$

从本质上来说 S_1^* 与 S_2^* 为无限集，因而这就产生了这样两个问题：（1）对于任何一个矩阵对策 $G=\{S_1, S_2, A\}$ 的混合扩充 $G^*=\{S_1^*, S_2^*, E\}$，$\min\limits_{Y\in S_2^*}\max\limits_{X\in S_1^*}E(X, Y)$ 与 $\max\limits_{X\in S_1^*}\min\limits_{Y\in S_2^*}E(X, Y)$ 是否存在？是否一定相等？（2）若上述二项均存在的话，则G^*有解的充要条件是什么？上述问题称为对策论的基本问题，经过不少数学家的努力，已得到完满的解决，现叙述如下。

定理1.3* 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为任一矩阵对策 G 的支付矩阵，又对于任意策略 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)\in S_1^*$、$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in S_2^*$，其数学期望 $E(X, Y)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$，则总有 $\min\limits_{Y\in S_2^*}\max\limits_{X\in S_1^*}E(X, Y)$ 与 $\max\limits_{X\in S_1^*}\min\limits_{Y\in S_2^*}E(X, Y)$ 存在且相等。

证明略，可参阅文献［9］。

定理1.4 矩阵对策 $G=\{S_1, S_2, A\}$ 在混合策略意义下有解的充分必要条件是

$$\min_{Y\in S_2^*}\max_{X\in S_1^*}E(X, Y)=\max_{X\in S_1^*}\min_{Y\in S_2^*}E(X, Y) \tag{1.8}$$

证明 充分性。由定理1.3知 $\min\limits_{Y\in S_2^*}\max\limits_{X\in S_1^*}E(X, Y)$ 与 $\max\limits_{X\in S_1^*}\min\limits_{Y\in S_2^*}E(X, Y)$ 均存在，设 $\min\limits_{Y\in S_2^*}E(X, Y)$ 在 $X=X^*$

达到最大，$\max\limits_{Y\in S_2^*} E(X, Y)$ 在$Y=Y^*$达到最小，则

$$\min_{Y\in S_2^*} E(X^*, Y)=\max_{X\in S_1^*}\min_{Y\in S_2^*} E(X, Y)$$

$$\max_{X\in S_1^*} E(X, Y^*)=\min_{Y\in S_2^*}\max_{X\in S_1^*} E(X, Y)$$

由所设（1.8）可知

$$\min_{Y\in S_2^*} E(X^*, Y)=\max_{X\in S_1^*} E(X, Y^*) \tag{1.9}$$

但由极小值定义

$$\min_{Y\in S_2^*} E(X^*, Y)\leqslant E(X^*, Y^*)$$

故

$$\max_{X\in S_1^*} E(X, Y^*)\leqslant E(X^*, Y^*)$$

此即说明对一切$X\in S_1^*$均应有

$$E(X, Y^*)\leqslant E(X^*, Y^*)$$

类似地由极大值定义可知

$$\max_{X\in S_1^*} E(X, Y^*)\geqslant E(X^*, Y^*)$$

于是由（1.9）式得

$$\min_{Y\in S_2^*} E(X^*, Y)\geqslant E(X^*, Y^*)$$

这说明对一切$Y\in S_2^*$均有

$$E(X^*, Y)\geqslant E(X^*, Y^*)$$

故对一切$X\in S_1^*$，$Y\in S_2^*$有

$$E(X, Y^*)\leqslant E(X^*, Y^*)\leqslant E(X^*, Y)$$

由定义 1.4 知对策G在混合策略意义下有解。

必要性证明读者可参照定理 1.1 的必要性证明自行完成。□

由定理 1.3 与定理 1.4 综合可知，任何一个矩阵对策在混合策略意义下一定有解。

推论1.5 若矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$在混合策略意义下的解为（X^*，Y^*），则对策值$V_{G^*}=E(X^*, Y^*)$满足

$$E(X^*,\ Y^*)=\min_{Y\in S_2^*}\ \max_{X\in S_1^*}E(X,\ Y)$$

$$=\max_{X\in S_1^*}\ \min_{Y\in S_2^*}E(X,Y)$$

证明同推论 1.2，从略。

推论1.6 若矩阵对策 $G=\{S_1,\ S_2,\ A\}$ 在混合策略意义下的解为 $(X^*,\ Y^*)$，值为 u，则有

$$u=\max_{X\in S_1^*}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i$$

$$=\min_{Y\in S_2^*}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j$$

证明 首先证明如下性质：对任何概率分布 $X=(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_m)$，$Y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ 及二组数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m,\ d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$ 有

$$\min_{Y\in S_2^*}\sum_{j=1}^{n}c_jy_j=\min_{1\leqslant j\leqslant n}c_j=c_l$$

$$\max_{X\in S_1^*}\sum_{i=1}^{m}d_ix_i=\max_{1\leqslant i\leqslant m}d_i=d_k \tag{1.10}$$

这是由于

$$c_j\geqslant c_l,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

因而对每一个 $Y\in S_2^*$ 有

$$\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\geqslant\sum_{j=1}^{n}c_ly_j=c_l$$

因此

$$\min_{Y\in S_2^*}\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\geqslant c_l$$

另一方面，对于一个第 l 个分量为 1，其他分量为 0 的特殊混合策略 $\widetilde{Y}=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 我们又有

$$c_l = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{y}_j \geqslant \min_{Y \in S_2^*} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$$

综合上述二式有

$$\min_{Y \in S_2^*} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = c_l = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j$$

同理可证

$$\max_{X \in S_1^*} \sum_{i=1}^{m} d_i x_i = d_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i$$

利用上述两式可将推论 1.5 的结论改写为下列形式：

$$v = \max_{X \in S_1^*} \min_{Y \in S_2^*} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right) y_j$$

$$= \max_{X \in S_1^*} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

$$= \min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) x_i$$

$$= \min_{Y \in S_2^*} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad \square$$

例1.9 求在例 1.6 中矩阵对策 G 的解。

解 由于局中人 P_1 与 P_2 的混合策略分别为 $X=(x, 1-x)\in S_1^*$，$Y=(y, 1-y)\in S_2^*$，其中 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$。故知 S_1^* 与 S_2^* 是无限集。但由（1.6）式知有

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i y_j$$

$$= 7\left(x - \frac{2}{7}\right)\left(y - \frac{3}{7}\right) + \frac{22}{7}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

显然 $Z = E(X, Y)$ 是 E_3 中的以 $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{22}{7}\right)$ 为顶点的马鞍面的一部分，由马鞍面的几何意义易知有

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} E(x, y) = E\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$= \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} E(x, y)$$

故由定理 1.4 与推论 1.5 知，局中人 P_1 的最优混合策略为 $X^* = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$，局中人 P_2 的最优混合策略为 $Y^* = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$，对策 G^* 的解为 (X^*, Y^*)，对策 G^* 的值 $V_{G^*} = E(X^*, Y^*) = \frac{22}{7}$。

（三）最优策略的性质

考虑到欲将例 1.9 的求解方法推广到一般的混合策略

$$X \in S_1^* = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_m) | x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, m, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

$$Y \in S_2^* = \left\{(y_1, y_2, \cdots, y_n) | y_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n, \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

上是十分困难的，因此我们需要寻求 G^* 的更为有效的求解方法。作为预备知识，下面先介绍 G^* 最优策略的一些性质。

定理1.7 若已知对策 G 的值 $V_{G^*} = u$，则 $X^* = (x_1, x_2, \cdots,$

$x_m)\in S_1^*$ 为局中人 P_1 的最优策略的充分必要条件是：对于每一个 $Y\in S_2^*$，都有 $u\leqslant E(X^*, Y)$。

$Y^*=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in S_2^*$ 为局中人 P_2 的最优策略的充分必要条件是：对于每一个 $X\in S_1^*$，都有 $u\geqslant E(X, Y^*)$。

证明 必要性。设 X^* 为 P_1 的最优策略，根据定义 1.5，存在 $Y^*\in S_2^*$，使混合局势 (X^*, Y^*) 对一切 $Y\in S_2^*$ 均有 $u=E(X^*, Y^*)\leqslant E(X^*, Y)$。

充分性。根据定理 1.3 与定理 1.4 可知任一矩阵对策在混合策略意义下一定有解，故存在 $X'\in S_1^*$，$Y'\in S_2^*$，对一切 $X\in S_1^*$，$Y\in S_2^*$ 均有

$$E(X, Y')\leqslant E(X', Y')\leqslant E(X', Y) \qquad (1.11)$$

由于 $V_{G^*}=u$，故 $E(X', Y')=u$。

由假设 $E(X', Y')\leqslant E(X^*, Y)$ 对每一个 $Y\in S_2^*$ 成立。令 $Y=Y'$，则 $E(X', Y')\leqslant E(X^*, Y')$。在 (1.11) 式中令 $X=X^*$，再由上式可得

$$E(X^*, Y')\leqslant E(X', Y')\leqslant E(X^*, Y')$$

故

$$E(X^*, Y')=E(X', Y')=u$$

再由 (1.11) 和题设有

$$E(X, Y')\leqslant E(X^*, Y')\leqslant E(X^*, Y)$$

于是，根据定义 1.4 知，(X^*, Y') 是对策 G 的解，X^* 是局中人 P_1 的最优策略。

定理的第二部分证明仿此由读者完成。 □

引进符号：

$$E(i, Y)=E(X_i, Y)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$$

$$E(X, j)=E(X, Y_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i$$

其中 $X_i\in S_1^*$ 是一个纯策略，它的第 i 个分量为 1，其余分量为 0，$Y_j\in S_2^*$ 也是一个纯策略，它的第 j 个分量为 1，其余分量为 0。因而有

$$E(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}E(i,Y)x_i=\sum_{j=1}^{n}E(X,j)y_j$$

推论1.8 若已知对策 G 的值 $V_{G^*}=u$，则 $X^*=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in S_1^*$ 为局中人 P_1 的最优策略的充分必要条件是：对于 $1\leqslant j\leqslant n$，有 $u\leqslant\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i$；$Y^*=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in S_2^*$ 为局中人 P_2 的最优策略的充分必要条件是：对于 $1\leqslant i\leqslant m$，有 $u\geqslant\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j$。

证明由读者自己完成。

定理1.9 若已知对策 $V_{G^*}=u$，又 $X^*=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$Y^*=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 分别是局中人 P_1、P_2 的最优策略，则

（1）当 $E(i,Y^*)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j<u$ 时有 $x_i=0$，只要 $1\leqslant i\leqslant m$；

（2）当 $E(X^*,j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i>u$ 时有 $y_j=0$，只要 $1\leqslant j\leqslant n$；

（3）当 $x_i\neq0$ 时有 $E(i,Y^*)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=u$，只要 $1\leqslant i\leqslant m$；

（4）当 $y_j\neq0$ 时有 $E(X^*,j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=u$，只要 $1\leqslant j\leqslant n$。

证明 用反证法证明结论（1）。

设其不然，则存在某些 h（$1\leqslant h\leqslant m$）使 $E(h,Y^*)<u$，但 $x_h^*\neq 0$。因而 $E(h, Y^*)x_h^*<ux_h^*$。但对于 $k=1, 2, \cdots, h-1, h+1, \cdots, m$，由推论1.8知都应有 $E(k, Y^*)\leqslant u$，或

$$E(k, Y^*)x_k^*\leqslant ux_k^*$$

从而

$$\sum_{i=1}^{m} E(i, Y^*)x_i^*<\sum_{i=1}^{m} ux_i^*=u$$

这与 $V_{G^*}=u=E(X^*, Y^*)$ 矛盾。

结论（2）、（3）、（4）读者自己证明。 □

定理1.10 设 u 为一实数，$X^*=(x_1, x_2, \cdots, x_m)\in S_1^*$，$Y^*=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in S_2^*$，则 u 为对策值且 X^* 为局中人 P_1 的最优策略，Y^* 为局中人 P_2 的最优策略的充分必要条件是：对于 $1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$ 有

$$E(i, Y^*)\leqslant u\leqslant E(X^*, j)$$

证明 必要性由定义1.4是显然的。

充分性。对任一 $X'=(x_1', x_2', \cdots, x_m')\in S_1^*$，由假设应有

$$E(X', Y^*)=\sum_{i=1}^{m} E(i, Y^*)x_i'\leqslant \sum_{i=1}^{m} ux_i'=u$$

同理，对任一 $Y'=(y_1', y_2', \cdots, y_n')\in S_2^*$，也有

$$E(X^*, Y')\geqslant u$$

在上述两个不等式中依次取 $X'=X^*$，$Y'=Y^*$，可得

$$E(X^*, Y^*)=u$$

并有

$$E(X', Y^*)\leqslant E(X^*, Y^*)\leqslant E(X^*, Y')$$

对任一 $X'\in S_1^*$，$Y'\in S_2^*$ 均成立，由定义1.4可知 u 为对策值，

X^*、Y^*分别为局中人 P_1、P_2 的最优策略。

引理1.11 m 维欧氏空间 E_m 的子集

$$\widetilde{S}_m=\left\{X=(x_1, x_2, \cdots, x_m) \mid x_i \geqslant 0, \quad i=1, \cdots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i=1\right\}$$

是有界、闭、凸集。

证明

（1）有界性　设 $X \in \widetilde{S}_m$，则有 $0 \leqslant x_i \leqslant 1$，$i=1, \cdots, m$，所以$X$到原点的距离（记作 $d(X, O)$）为

$$d(X, O)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i}=1$$

故知 $\widetilde{S}_m$ 被包含在一个中心在原点，半径为1的超球内，因而是有界的。

（2）闭性　设有 $\widetilde{S}_m$ 中的一无穷点列$\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$趋于点X。若记

$$X_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}) \quad n=1, 2, \cdots$$
$$X_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)})$$

则必有

$$\lim_{n \to \infty} x_i^{(n)}=x_i^{(0)} \quad i=1, 2, \cdots, m$$

由于 $X_n \in \widetilde{S}_m$，$n=1, 2, \cdots$，所以有

$$x_i^{(n)} \geqslant 0, \quad i=1, 2, \cdots, m, \quad n=1, 2, \cdots$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(n)}=1, \quad n=1, 2, \cdots$$

从而有

$$\lim_{n \to \infty} x_i^{(n)}=x_i^{(0)} \geqslant 0, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}x_i^{(n)}=\sum_{i=1}^{m}x_i^{(0)}=1$$

所以 $X_0\in\widetilde{S}_m$。此说明 S_m 中的任意点列之极限点仍在 $\widetilde{S}_m$ 中，故 $\widetilde{S}_m$ 为闭集。

（3）凸性　设 $X_1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_m^{(1)})\in\widetilde{S}_m$，$X_2=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_m^{(2)})\in\widetilde{S}_m$，则有

$$x_i^{(1)}\geqslant 0，x_i^{(2)}\geqslant 0，i=1，2，\cdots，m，且\sum_{i=1}^{m}x_i^{(1)}=1，$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^{(2)}=1。$$

取 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，显然有

$$\lambda x_i^{(1)}+(1-\lambda)x_i^{(2)}\geqslant 0，\quad i=1，2，\cdots，m$$

$$\sum_{i=1}^{m}[\lambda x_i^{(1)}+(1-\lambda)x_i^{(2)}]$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}x_i^{(1)}+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}x_i^{(2)}=1$$

由此可知 $\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in\widetilde{S}_m$，所以 $\widetilde{S}_m$ 是凸集。　□

定理1.12　设 G 是一个以 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为支付矩阵的矩阵对策，$T_1(T_2)$ 是局中人 $P_1(P_2)$ 的最优策略集。则 $T_1(T_2)$ 是 $E_m(E_n)$ 上的非空，有界、闭凸集。

证明

（1）非空　由基本定理1.3与定理1.4知，任何矩阵对策至少有一个解，故 $T_1(T_2)$ 非空。

（2）有界性　由引理1.11知，$\widetilde{S}_m(\widetilde{S}_n)$ 是有界的，而 $T_1\subset\widetilde{S}_m$，$T_2\subset\widetilde{S}_n$，故 T_1 与 T_2 均有界。

（3）闭性　若 T_1 为有限集，则闭性得证；若 T_1 为无限集，由于 T_1 的有界性，则至少有一极限点。不妨设 T_1 的一点列 $X_n=$

$(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \cdots, x_m^{(t)})$, $t=1, 2, \cdots$, 趋于 X_0, 则由 $\widetilde{S}_m$ 的闭性知 $X_0 \in \widetilde{S}_m$. 取 $Y_0 \in T_2$, 则对 $t=1, 2, \cdots$, (X_t, Y_0) 都是最优局势, 由定理 1.10 必要性知, 对 $t=1, 2, \cdots$, 有

$$E(i, Y_0) \leqslant u \leqslant E(X_t, j), \quad i=1, 2, \cdots, m,$$
$$j=1, 2, \cdots, n$$

于是有

$$E(i, Y_0) \leqslant u \leqslant \lim_{t\to\infty} E(X_t, j) = E(X_0, j),$$
$$i=1, 2, \cdots, m, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

再次引用定理 1.10 的充分性可得 $X_0 \in T_1$, 此即证明了 T_1 的闭性.

同理可证 T_2 的闭性.

(4) 凸性　若 $X_1, X_2 \in T_1 \subset \widetilde{S}_m$, 则由 $\widetilde{S}_m$ 的凸性知, 对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 有

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in \widetilde{S}_m$$

取 $Y_0 \in T_2$, 则 (X_1, Y_0), (X_2, Y_0) 均为最优局势, 于是由定理 1.10 必要性得

$$E(X_1, j) \geqslant u \geqslant E(i, Y_0)$$
$$i=1, 2, \cdots, m, \quad j=1, 2, \cdots, n$$
$$E(X_2, j) \geqslant u \geqslant E(i, Y_0)$$

从而有

$$\lambda_1 E(X_1, j) + (1-\lambda) E(X_2, j) \geqslant u \geqslant E(i, Y_0)$$

或有

$$E(\lambda_1 X_1 + (1-\lambda) X_2, j) \geqslant u \geqslant E(i, Y_0),$$
$$i=1, 2, \cdots, m, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

由定理 1.10 充分性知 $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in T_1$, 故 T_1 为凸集. 同理可证 T_2 为凸集. □

定义1.5　若 S 为凸集, 对于 S 中的点 X, 如果不存在不同的两点 $X_1 \in S$, $X_2 \in S$, 使得 $X = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$, 则称 X 为 S 的端

点，端点的全体记作$K(S)$。

定理1.13　A为E_n中的一个非空、有界、闭凸子集，若其端点集$K(A)$非空有限，则A可由其端点的凸线性组合的全体来表示。

证明略，读者可参考文献[26]。

由定理1.12知，对于任何一个矩阵对策G，若局中人$P_1(P_2)$的最优策略集为$T_1(T_2)$，则$T_1(T_2)$必为非空、有界、闭凸集。如能证明$T_1(T_2)$的端点集$K(T_1)(K(T_2))$为有限集，并求出此有限个端点来，则由定理1.13知这有限个端点的凸线性组合即为$T_1(T_2)$，也就是找到了局中人$P_1(P_2)$的所有最优策略。关于$K(T_1)(K(T_2))$的有限性可由如下定理的推论得出。

定理1.14　设对策G的支付矩阵为$A=(a_{ij})_{m\times n}$，对策值为u，又假设$X\in T_1$，$Y\in T_2$，则$X\in K(T_1)$，$Y\in K(T_2)$的充分必要条件是：存在A的一个r阶非奇异子方阵B，使$J_r(B_{ij})^*_{r\times r}J_r'\neq 0$，且

$$u=\frac{|B|}{J_r(B_{ij})^*_{r\times r}J_r'}$$

$$\dot{X}=\frac{J_r(B_{ij})^*_{r\times r}}{J_r(B_{ij})^*_{r\times r}J_r'} \tag{1.12}$$

$$\dot{Y}=\frac{J_r((B_{ij})^*_{r\times r})'}{J_r(B_{ij})^*_{r\times r}J_r'}$$

其中$|B|$为B的行列式，$(B_{ij})^*_{r\times r}$是B的伴随矩阵，$J_r=(1,1,\cdots,1)_{r\times 1}$，$\dot{X}(\dot{Y})$是自$X(Y)$中删去若干分量而得到的向量，其中所删去的各分量之序号即为自A得出B时所删去的那些行（列）的序号。

证明见参考文献[26]。

推论1.15　端点集$K(T_1)$与$K(T_2)$为有限集。

证明　由于支付矩阵A的子方阵只有有限个，而利用每一个子方阵最多只能求得$K(T_1)$，$K(T_2)$的一个点（有关求解方法

详见（四））。因此$K(T_1)$，$K(T_2)$为有限点集。 □

定理1.16 给定对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中$A=(a_{ij})_{m\times n}$。在此基础上构成新对策$\tilde{G}=\{S_1, S_2, \tilde{A}\}$，其中$\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$，$\tilde{a}_{ij}=a_{ij}+d$，$i=1, \cdots, m$，$j=1, \cdots, n$。则局中人在对策$G$中的最优策略与在$\tilde{G}$中的最优策略完全一致，而对策值仅差一常数$d$，即有$V_{\tilde{G}}=V_G+d$。

证明 设局中人P_1在对策$\tilde{G}$中的支付函数为$\tilde{E}(X, Y)$，在对策G中的支付函数为$E(X, Y)$，则易知有

$$\tilde{E}(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d)x_iy_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j+d=E(X, Y)+d$$

又设X^*，Y^*为局中人P_1与P_2在G中的最优策略，则对任何$X\in S_1^*$，$Y\in S_2^*$有

$$E(X, Y^*)\leqslant E(X^*, Y^*)\leqslant E(X^*, Y)$$

上述不等式两边同时加一常数d，则有

$$E(X, Y^*)+d\leqslant E(X^*, Y^*)+d\leqslant E(X^*, Y)+d$$

此即为

$$\tilde{E}(X, Y^*)\leqslant\tilde{E}(X^*, Y^*)\leqslant\tilde{E}(X^*, Y)$$

对任何$X\in S_1^*$，$Y\in S_2^*$成立。因而由定义知X^*，Y^*亦为局中人P_1与P_2在$\tilde{G}$中的最优策略，并有

$$\tilde{E}(X^*, Y^*)=V_{\tilde{G}}=V_G+d$$ □

（四）矩阵对策的求解方法

矩阵对策的求解方法很多，本节仅介绍最实用的二种方法：矩阵法和线性规划法。

1. 矩阵解法

对于一个给定的矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，由定理1.10

可知，局中人 P_1 和 P_2 的最优策略 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 必满足下述不等方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geqslant u, & j=1,\cdots,n \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x_i \geqslant 0, & i=1,\cdots,m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leqslant u & i=1,\cdots,m \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y_j \geqslant 0, & j=1,\cdots,n \end{cases} \tag{1.13}$$

于是，根据定理 1.14 可以得到一种被称为矩阵法的求解方法，其步骤如下：

1°选取 A 的一个 r 阶（$r\geqslant 2$）非奇异子方阵 B，判断 $J_rB^*J_r' \neq 0$ 是否满足。若满足，则转 2°；否则此 B 不对应 T 的一个端点，故转 4°。

2°计算

$$\bar{X} = \frac{J_rB^*}{J_rB^*J_r'}$$

$$\bar{Y} = \frac{J_r(B^*)'}{J_rB^*J_r'}$$

判断 $\bar{X}$、$\bar{Y}$ 是否为 E_r 上的概率向量。若不是，则 B 不对应 T 的一个端点，于是转 4°；否则转 3°。

3°计算

$$u = \frac{|B|}{J_rB^*J_r'}$$

并在向量 $\bar{X}(\bar{Y})$ 的基础上补上零分量，使其变成 $m(n)$ 维向量，这些补上的零分量的位置分别对应于自 A 得到 B 时所删去的那些行（列）的位置。然后验证上述所得到的 $m(n)$ 维向量 $X(Y)$

是否满足不等式组（1.13）。若满足，则由定理1.10知有$X(Y)\in T_1(T_2)$，从而由定理1.14得知有$X(Y)\in K(T_1)(K(T_2))$，然后转4°；若所得到的$X(Y)$不满足（1.13）式，说明$X(Y)\notin T_1(T_2)$，将其舍去，然后转4°。

4°判断A中的所有r（$r\geqslant 2$）阶子方阵是否已选取完毕。若已选取完毕则转5°；否则转1°。

5°设经过上述各步骤得到$K(T_1)=\{X_1, X_2, \cdots, X_r\}$，$K(T_2)=\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_s\}$，作$K(T_1)(K(T_2))$中所有端点的凸线性组合有

$$T_1=\{X|X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_rX_r\},$$

$$\text{其中}\ \alpha_i\geqslant 0,\ i=1,\ \cdots,\ r,\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i=1,$$

$$T_2=\{Y|Y=\beta_1Y_1+\beta_2Y_2+\cdots+\beta_sY_s\},$$

$$\text{其中}\ \beta_j\geqslant 0,\ j=1,\ \cdots,\ s,\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j=1$$

于是局中人P_1与P_2的最优策略集T_1与T_2已求得。

例1.10 已知矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中局中人P_1的支付矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

求局中人的最优策略集。

解 考察支付矩阵A的各阶子方阵的个数，计有2×2阶子方阵9个，3×3阶子方阵1个。

首先检验3×3阶子方阵。

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 4 & -3 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=-18$$

伴随矩阵

$$(A_{ij})^*_{3\times3}=\begin{bmatrix}-13 & -9 & 19\\ -6 & 0 & 6\\ 17 & 9 & -29\end{bmatrix}$$

$$((A_{ij})^*_{3\times3})'=\begin{bmatrix}-13 & -6 & 17\\ -9 & 0 & 9\\ 19 & 6 & -29\end{bmatrix}$$

则 $J_3(A_{ij})^*_{3\times3}J_3'=-6$，$J_3((A_{ij})^*_{3\times3})'=(-3,\ 0,\ -3)$，$J_3(A_{ij})^*_{3\times3}=(-2,\ 0,\ -4)$，代入（1.12）式计算可得

$$X=\frac{(-2,\ 0,\ -4)}{-6}=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$$

$$Y=\frac{(-3,\ 0,\ -3)}{-6}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$u=\frac{-18}{-6}=3$$

从而 $X_1=\dot{X}=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$，$Y_1=\dot{Y}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$，$u=3$。将$X_1$，$Y_1$，$u$ 代入（1.13）式进行检验，容易得知有

$$E(i,\ Y_1)=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}y_j^{(1)}=u,\quad i=1,\ 2,\ 3$$

$$E(X_1,\ j)=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x_i^{(1)}=u,\quad j=1,\ 2,\ 3$$

且 $\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^{(1)}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$；$\sum\limits_{j=1}^{3}y_j^{(1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$；$x_i^{(1)}\geqslant 0$；$i=1,\ 2,\ 3$；$y_j^{(1)}\geqslant 0$，$j=1,\ 2,\ 3$。

故 $X_1 \in T_1$，$Y_1 \in T_2$。根据定理 1.14，$X_1 \in K(T_1)$，$Y_1 \in K(T_2)$。

在 9 个 2 × 2 阶子方阵中，下面三个二阶子方阵

$$B_1=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B_2=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad B_3=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

由于 $J_2(B_{ij})^*_{2\times2}$ 或 $J_2((B_{ij})^*_{2\times2})'$ 的分量不同号，故由（1.12）式计算出来的 $\dot{X} \overline{\in} S_1^*$ 或 $\dot{Y} \overline{\in} S_2^*$，因而不能导出端点 X，Y。

子方阵

$$B_4=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

为降秩矩阵，其逆矩阵不存在，因而对应的 u，X，Y 不存在。

下面三个子方阵

$$B_5=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B_6=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B_7=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

根据（1.12）式算出的 $\dot{X}$、$\dot{Y}$ 所导出的 X，Y 都不满足（1.13）式，因此不能导出端点。

最后的两个子方阵

$$B_8=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_9=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

分别导出局中人的如下两组最优策略（读者自己验算）：

$$X_2=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right),\ Y_2=(0,\ 0,\ 1)$$

$$X_3=(1,\ 0,\ 0),\ Y_3=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

因而 X_2，$X_3 \in K(T_1)$，Y_2，$Y_3 \in K(T_2)$。

以下来构造局中人的最优策略集 T_1，T_2。根据上面检验结果，由于 $X_1=X_2$，$Y_1=Y_3$，故有 $K(T_1)=\{X_2,\ X_3\}$，$K(T_2)=\{Y_2,\ Y_3\}$。根据定理 1.12 和定理 1.13，局中人 P_1 的最优策

略集 T_1 是由 $K(T_1)$ 中的点的凸线性组合所构成. 即有

$$T_1=\{X|X=\alpha X_3+(1-\alpha)X_2,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\ 0,\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\alpha\right),\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\right\}$$

同理局中人 P_2 的最优策略集为

$$T_2=\{Y|Y=\beta Y_2+(1-\beta)Y_3,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1\}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta,\ 0,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta\right),\ 0\leqslant\beta\leqslant 1\right\}$$

2. 线性规划法

由定理1.4和推论1.5和1.6知，任一具有支付矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的矩阵对策在混合策略意义下有解 $(X^*,\ Y^*)$ 的充要条件是 $u=E(X^*,\ Y^*)$ 应满足等式

$$u=\max_{X\in S_1^*}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i$$

$$=\min_{Y\in S_2^*}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j$$

其中

$$S_1^*=\left\{X=(x_1,\ x_2,\ \cdots x_m)\,\middle|\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ \cdots,\ m\right\}$$

$$S_2^*=\left\{Y=(y_1,\ y_2,\ \cdots y_n)\,\middle|\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1,\ y_j\geqslant 0,\ j=1,\ \cdots,\ n\right\}$$

若记符号 $L(X)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i$，$Q(Y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}y_j$，则易知 $L(X)$，$Q(Y)$ 分别是定义在 S_1^* 与 S_2^* 上的线性

函数，由于

$$u=\max_{X\in S_1^*}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=\max_{X\in S_1^*}L(X)$$

$$=\min_{Y\in S_2^*}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=\min_{Y\in S_2^*}Q(Y)$$

这说明对策值 u 是线性目标函数 $L(X)$（$Q(Y)$）在 $X\in S_1^*$（$Y\in S_2^*$）上的最大（小）值。如果再注意到符号 $L(X)$ 的定义，则可得知求解矩阵对策 G 中局中人 P_1 的最优策略 X^* 和值 u 等价于求解如下线性规划

$$\max L(X)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\geqslant L(X), & j=1,\cdots,n\\ x_i\geqslant 0, & i=1,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\end{cases}$$

注意到定理 1.16 的结论，一个以 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为支付矩阵的矩阵对策 G 和另一个以 $\tilde{A}=(a_{ij}+d)_{m\times n}$ 为支付矩阵的矩阵对策 $\tilde{G}$ 有相同的解，只是对策值差一常数 d。因而不失一般性，可设 $a_{ij}>0$（$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$）来求解矩阵对策 G。此时显然有 $L(X)>0$。作变量代换 $x_i'=\frac{x_i}{L(X)}$，（$i=1,\cdots,m$），则上述线性规划等价于下述线性规划：

$$\max L(X)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i'\geqslant 1, & j=1,\cdots,n\\ x_i'\geqslant 0, & i=1,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_i'=\frac{1}{L(X)}\end{cases}$$

也即等价于

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i'$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i' \geqslant 1, & j=1, \cdots, n \\ x_i' \geqslant 0, & i=1, \cdots, m \end{cases}$$

设上述线性规划的最优解为 $u=\max L(X)=L(X_0')$，$X_0'=(x_{01}', x_{02}', \cdots, x_{0m}')$，则由于有 $x_{0i}'=\frac{x_i}{u}$，$i=1, \cdots, m$，显然有 $X^*=X_0'u$，其中 $\sum_{i=1}^{m} x_{0i}'=\sum_{i=1}^{m} x_i^*/u=\frac{1}{u}$。

同理求解局中人 P_2 的最优策略 Y^* 与 u 等价于求解如下线性规划

$$\max \sum_{j=1}^{n} y_j'$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j' \leqslant 1, & i=1, \cdots, m \\ y_j' \geqslant 0, & j=1, \cdots, n \end{cases}$$

其中 $y_j'=\frac{y_j}{u}$，$j=1, \cdots, n$。若 $u=\min Q(Y)=Q(Y_0')$，则有 $Y^*=Y_0'u$。

综上所述，可得线性规划法的一般步骤如下：

1° 选择常数 d，使 $a_{ij}+d>0$ 对 $i=1, \cdots, m$，$j=1, \cdots, n$ 成立，设 $\bar{a}_{ij}=a_{ij}+d$

2° 写出求解对策 $\bar{G}$ 的两个对应的线性规划

$$\min \sum_{i=1}^{m} x'_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij}x'_i \geqslant 1, & j=1,\cdots,n\\ x'_i \geqslant 0, & i=1,\cdots,m\end{cases}$$

及

$$\max \sum_{j=1}^{n} y'_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}y'_j \leqslant 1, & i=1,\cdots,m\\ y'_j \geqslant 0, & j=1,\cdots,n\end{cases}$$

求解上述两个线性规划得最优解 X'_0, Y'_0, u'，其中 $u'=1\Big/\sum_{i=1}^{m} x'_{0i}$。

3° 计算对策 G 的最优解

$$X^*=X'_0u'$$

$$Y^*=Y'_0u'$$

$$u=u'-d$$

例1.11 设对策 $G=\{S_1, S_2, A\}$ 其中局中人 P_1 的支付矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

求解对策 G 的解与值。

解 由于 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \neq \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$，故对策 G 在纯策略意义下无解，现用线性规划法求其混合策略意义下的解。

首先选取 $d=1$。使 $\tilde{a}_{ij}=a_{ij}+d>0$，即有

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

求解 $\tilde{G}$ 对应的线性规划

$$\min \sum_{i=1}^{3} x_i'$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1'+x_2'+2x_3'\geqslant 1 \\ x_1'+4x_2'+3x_3'\geqslant 1 \\ 3x_1'+2x_2'+2x_3'\geqslant 1 \\ x_i'\geqslant 0,\quad i=1,2,3 \end{cases}$$

及

$$\max \sum_{j=1}^{3} y_j'$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3y_1'+y_2'+3y_3'\leqslant 1 \\ y_1'+4y_2'+2y_3'\leqslant 1 \\ 2y_1'+3y_2'+2y_3'\leqslant 1 \\ y_j'\geqslant 0,\quad j=1,2,3 \end{cases}$$

利用单纯形法（或改进单纯形法）求解得其最优解为 $X_0'=\left(\frac{1}{7},\ 0,\ \frac{2}{7}\right)$，$Y_0'=\left(\frac{2}{7},\ \frac{1}{7},\ 0\right)$，$v'=\frac{7}{3}$。

因此对策 G 的解为 $X^*=v'X_0'=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$，$Y^*=v'Y'=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$，$v=v'-d=\frac{4}{3}$。

3．策略的优超性与求解简化

利用下述的策略优超性，可用来使求解过程简化。首先我们来观察下例。

例1.12 给定矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$其中局中人P_1的支付矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 6 & 1\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

求局中人最优混合策略集和对策的值。

解 对支付矩阵A的元素稍加考察，就不难看出，局中人P_1绝不会采用策略α_1，这是由于无论局中人P_2选择什么策略，局中人P_1的策略α_3的支付总比策略α_1的支付为大。因此，局中人P_1的策略α_1应该以零概率出现在其最优混合策略中。这样，要求解上述矩阵对策，可以将矩阵的第一行划去，转而求解矩阵对策A_1即可。

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

再对矩阵A_1的元素考察，发现局中人P_2显然不愿意采用策略β_1，因为无论局中人P_1采用何种策略，局中人P_2采用策略β_3的支付均小于策略β_1的支付，因此又可将A_1矩阵的第一列划去，只要解矩阵对策A_2即可，其中$A_2=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$。由例1.9得知，$\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$，$\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{4}\right)$分别为$A_2$对应的最优混合策略，对策的值为$\frac{22}{7}$。若再回到对策$A$，则不难想象，其解应为

$$X^*=\left(0, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right),\ Y^*=\left(0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right),\ V_G=\frac{22}{7}.$$

利用（1.7）式容易验证上述结论的正确性。

下面我们介绍策略的优超性概念。

定义1.6 设矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，其中局中人P_1的

支付矩阵为$A=(a_{ij})_{m\times n}$。若有

$$a_{kj}\geqslant a_{lj},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

则称局中人P_1的策略α_k优超于策略α_l。若有

$$a_{ik}\leqslant a_{il},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

则称局中人P_2的策略β_k优超于策略β_l。

若在上述不等式中成立严格的不等式，则分别称局中人P_1(P_2)的策略$\alpha_k(\beta_k)$严格优超于策略$\alpha_l(\beta_l)$。

可以证明，如果是严格优超，则将被优超的那个纯策略所对应的行或列划去后，由剩下的阶数较低的矩阵对策的最优策略，就可以得到原来对策的最优策略。这只要将所划去的那一行或列所对应的纯策略赋以概率0即可。但如果是优超而不是严格优超，虽然仍可以从剩下的阶数较低的矩阵对策的解得到原来对策的解，但此时有可能"失去"某些解。这就是说，解剩下的阶数较低矩阵对策所得的解，可能不是全部的最优策略。当然，如果我们只要得到一个解（通常的情况正是如此），则就可应用这种优超性来简化求解过程。

§1.3 无限策略对策

前面我们所考虑的对策都是假定每个局中人的策略集为有限集的情况下来讨论的，这类对策称为有限对策。但是客观世界中还存在着另一类很重要的对策现象，即局中人是从一个由无限多个纯策略所组成的策略集中来挑选策略并进行对策。例如，在经济生活中，如果局中人把商品的价格作为纯策略，那末，因为一种商品有无穷多种可能的价格，因此局中人的策略集便是一个无限集。以后我们把具有无限策略集的对策统称为无限对策，无限对策自然可以看成是有限对策的推广。

以下我们讨论二人零和无限对策，并且假定每个局中人只有

一个步法，而且每个局中人对于另一个局中人的策略选择预先毫无信息。把这种对策和我们在第二节讨论过的矩阵对策比较一下就可看出，它和矩阵对策的不同仅仅是这里的纯策略集S_1、S_2为无限集而已。与矩阵对策类似，我们同样可以把二人零和无限对策描述为：局中人P_1从纯策略集（无限集）S_1中选择一个纯策略x，局中人P_2从另一个纯策略集（无限集）S_2中选择一个纯策略y，由x、y确定了对策的一个局势，这一局势的结果是局中人P_2把$M(x, y)$支付给局中人P_1，$M(x, y)$是一个二元实值函数。因此，任意一个二人零和无限对策G，同样可简记为$G=\{S_1, S_2, M\}$。

一个无限集当用闭区间来表示时，总可以通过映射使它对应于闭区间$[0, 1]$。故我们可以用闭区间$[0, 1]$来表示纯策略无限集S_1、S_2，用$[0, 1]$上的点来表示局中人的纯策略，而支付函数$M(x, y)$就是定义在矩形区域$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$上的实值函数。由于闭区间$[0, 1]$在实变函数论中又叫连续统，因此无限对策又可叫做连续对策。

（一）具有鞍点的二人零和连续对策和最优纯策略

二人零和有限对策中关于鞍点的概念容易推广到二人零和连续对策中去，于是可得如下定义。

定义1.7 给定二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$，若存在这样的纯策略$x^* \in S_1$，$y^* \in S_2$使$M(x, y^*) \leqslant M(x^*, y^*) \leqslant M(x^*, y)$对一切$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$均成立，则称$(x^*, y^*)$为对策$G$在纯策略意义下的解。点$(x^*, y^*)$又叫做支付函数$M(x, y)$的鞍点，$x^*$、$y^*$分别称为局中人$P_1$、$P_2$的最优纯策略。局中人$P_1$的支付$M(x^*, y^*)$称为对策$G$的值。

当$M(x, y)$具有鞍点时，其相应的对策$G=\{S_1, S_2, M\}$称为具有鞍点的无限对策。

例1.13 给定二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$，其中局

中人 P_1 从策略集 $S_1=[0, 1]$中选取一个数 x，局中人 P_2 亦独立地从策略集 $S_2=[0, 1]$内选取一个数 y。两人选取结束后，局中人 P_2 给 P_1 的支付为$M(x, y)=2x^2-y^2$，求局中人 P_1 与 P_2 的最优纯策略。

解 注意到当 $x\geqslant 0$ 时，$M(x, y)$ 是关于x的单调增函数。故对$[0, 1]$区间中的任意的 x 有$M(x, y)\leqslant M(1, y)$ 对任何y成立，特殊地有$M(x, 1)\leqslant M(1, 1)$；类似地，当 $y\geqslant 0$ 时，$M(x, y)$ 是关于y的单调降函数，所以对于$[0, 1]$区间中的任意一个y，有$M(x, 1)\leqslant M(x, y)$ 对任何x成立，特殊地有$M(1, 1)\leqslant M(1, y)$。综合上述两式可得

$$M(x, 1)\leqslant M(1, 1)\leqslant M(1, y), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1$$

由定义 1.7 可知，该矩阵对策有鞍点（1，1），$x=1$，$y=1$ 分别是局中人 P_1 和 P_2 的最优纯策略。

假设支付函数$M(x, y)$ 对于每一个 $x\in[0, 1]$关于 y 存在最小值，对于每一个 $y\in[0, 1]$关于 x 存在最大值。当局中人 P_1 在$[0, 1]$中选择纯策略 x 时，对局中人P_2 在$[0, 1]$中的任何选择，局中人 P_1 得到支付的最小值是 $\min\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} M(x, y)=f(x)$，显然局中人 P_1 可以选择 x 使 $f(x)$尽可能的大。因此，对局中人 P_1 来说可能存在这样的纯策略 x，使他至少可以得到 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\min\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} M(x, y)=u_1$ 的收入。类似地局中人 P_2 也可能存在这样的纯策略 y 使局中人 P_2 最多只能付出 $\min\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x, y)=u_2$。因此容易证明如下定理

定理1.17 给定二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$，并设 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\min\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} M(x, y)$ 和 $\min\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x, y)$ 存在，则对策G在纯策略意义下有解的充分必要条件为

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min_{0\leqslant y\leqslant 1} M(x,y)=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\max_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x,y) \tag{1.14}$$

读者可仿照定理 1.1 类似证明，在此从略。

（二）无鞍点的二人零和连续对策和最优混合策略

与二人零和有限对策类似，并非一切二人零和连续对策均能满足定理 1.17 中等式（1.14）的要求，若支付函数$M(x,y)$满足关系

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min_{0\leqslant y\leqslant 1} M(x,y)<\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\max_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x,y)$$

则连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$在纯策略意义下无解，即支付函数$M(x,y)$不存在鞍点。我们把相应的对策G称为不具鞍点的无限对策。

回忆我们在矩阵对策中研究过的情形，如果一个二人有限零和对策没有鞍点，即在纯策略意义下对策无解时，可以通过引进混合策略的概念来寻求对策在混合策略意义下的解。所谓混合策略就是定义在有限策略集S上的离散型随机变量的概率分布列

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i=1,$$

其中x_i为局中人P_1选取纯策略α_i的概率，记作$P(\xi=\alpha_i)=x_i$。于是为了求解不具鞍点的二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$，也可同样引进混合策略的概念，即定义一个无限策略集$S=[0, 1]$上的概率分布即可。然而考虑到此时策略集$S_1=[0, 1]$或$S_2=[0, 1]$均为无限不可列集，因而此概率分布应该是定义在$[0, 1]$上的连续型随机变量的概率分布函数$F(x)$，即满足等式$\int_0^1 \mathrm{d}F(x)=1$的概率分布函数（这样的概率分布函数$F(x)$是很多的，如在$[0, 1]$上均匀分布的概率分布函数，$\beta$分布函数等等），上述的概率分布以下简称为定义在$[0, 1]$

上的分布函数。

于是，当给定二人零和连续对策$G=\langle S_1, S_2, M\rangle$，其支付函数为$M(x, y)$。局中人$P_1$可按照分布函数$F(x)$所确定的混合策略从[0，1]中随机选取$x$；局中人$P_2$按照分布函数$G(y)$所确定的混合策略从[0，1]中随机选取$y$。对局中人$P_2$选定的任何$y$，$P_1$的期望支付值为$\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)$。由于$y$是按照分布函数$G(y)$选定的，所以局中人$P_1$的期望总收益（或支付）应为

$$\int_0^1\left[\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\right]\mathrm{d}G(y)$$

简记为

$$\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$$

令

$$E(F, G)=\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$$

于是，若局中人P_1按照分布函数$F(x)$选择混合策略，局中人P_2按照分布函数$G(y)$选择混合策略，则局中人P_1的期望支付值为$E(F, G)$。由于对策是零和的，故局中人P_2的期望支付值为$-E(F, G)$。假定$\max\limits_{F\in D}\min\limits_{G\in D}E(F, G)$，$\min\limits_{G\in D}\max\limits_{F\in D}E(F, G)$都存在，且$\max\limits_{F\in D}\min\limits_{G\in D}E(F, G)=u_1$，$\min\limits_{G\in D}\max\limits_{F\in D}E(F, G)=u_2$，其中$D$表示定义在[0，1]上的概率分布函数的全体。那么，和我们前面研究过的情形类似，此时局中人P_1能够选择一个分布函数$F^*\in D$，以保证他的收入至少为（期望值）u_1，而局中人P_2能够选择一个分布函数$G^*\in D$使P_1的收入不会多于（期望值）u_2，且有$u_1\leqslant u_2$。于是，当$u_1=u_2$时，我们引入如下定义。

定义1.8 若

$$\max_{F(x)\in D}\ \min_{G(y)\in D} E(F, G)$$

$$=\min_{G(y)\in D}\ \max_{F(x)\in D} E(F, G)=u$$

则称对策G在混合策略意义下有解，并称u为二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$的值（在混合策略意义下对局中人P_1的支付）。

利用与定理 1.4 证明完全类似的方法，容易证明此时存在混合策略$F^*(x)$，$G^*(x)\in D$使对一切F，$G\in D$均有

$$E(F, G^*)\leqslant E(F^*, G^*)\leqslant E(F^*, G)$$

我们同样地称$F^*(x)$、$G^*(y)$分别为局中人P_1、P_2的混合策略，称函数组（F^*，G^*）为对策G的解。仿照推论 1.2 容易证明，此时对策值$u=E(F^*, G^*)$。这正是我们在上节中引进的在纯策略意义下关于对策的解、值和最优纯策略在混合策略意义下的推广。

在矩阵对策中，我们曾经证明了任一矩阵对策在混合策略意义下一定有解，即对任一给定矩阵对策$G=\{S_1, S_2, A\}$，在混合扩充$G^*=\{S_1^*, S_2^*, E(X, Y)\}$中必有$X^*\in S_1^*$，$Y^*\in S_2^*$，使

$$\max_{X\in S_1^*}\ \min_{Y\in S_2^*} E(X, Y)=\min_{Y\in S_2^*}\ \max_{X\in S_1^*} E(X, Y)$$

然而这一结论对于二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M(x, y)\}$来讲，只能在一定的条件下才能成立。

定理1.18 若支付函数$M(x, y)$在区域$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$上连续，则二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$在混合策略意义下一定有解。

换一种说法，当$M(x, y)$在$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续时，$\max\limits_{F(x)\in D}\ \min\limits_{G(y)\in D} E(F, G)$和$\min\limits_{G(y)\in D}\ \max\limits_{F(x)\in D} E(F, G)$都存在，且

$$\max_{F(x)\in D}\ \min_{G(y)\in D} E(F,G)$$

$$=\min_{G(y)\in D}\ \max_{F(x)\in D} E(F,G)。$$

由于证明过程冗长，在此从略。详见参考文献[26]。

（三）最优策略的性质

虽然定理1.18肯定了具有连续支付函数的连续对策在混合策略意义下一定有解，但是和矩阵对策相比较，连续对策的问题求解要困难得多。因为由定义1.8得知，求对策的解（F^*，G^*）即求Stieltjes积分（简称S积分）$\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$ 对一切集中于[0，1]的分布函数的最大值、最小值（有关S积分性质详见附录一）上述问题除某些特殊情形外，目前还没有一般的解法。下面几个定理可用来判断一个给定的混合策略是否为局中人的最优混合策略。其中第一个判别定理可用定义1.9直接得出。

定理1.19 设二人零和连续对策$G=\langle S_1, S_2, M(x,y)\rangle$的支付函数$M(x,y)$在区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续，则$F^*(x)\in D$，$G^*(y)\in D$是局中人$P_1$，$P_2$的最优混合策略的充分必要条件为：对一切$F$，$G\in D$有

$$E(F,G^*)\leqslant E(F^*,G^*)\leqslant E(F^*,G)$$

定理1.20 设二人零和连续对策$G=\langle S_1, S_2, M\rangle$的支付函数$M(x,y)$在区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续，则$F^*(x)\in D$，$G^*(y)\in D$分别为局中人$P_1$，$P_2$的最优混合策略的充分必要条件为：对[0，1]中的任意两点x^*，y^*有

$$\int_0^1 M(x^*,y)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\leqslant\int_0^1 M(x, y^*)\mathrm{d}F^*(x) \tag{1.15}$$

证明 必要性。根据定理 1.19 对任意F、$G\in D$有

$$\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y)$$

在上述不等式中令 $F(x)=I_{x^*}(x)$，$G(y)=I_{y^*}(y)$ 其中 $I_{x^*}(x)$，$I_{y^*}(y)$ 为阶梯函数。则由S积分性质知有

$$\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)=M(x^*, y)$$

$$\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G(y)=M(x, y^*)$$

必要性得证。

充分性。若对$[0, 1]$中的任意两点x^*，y^*有

$$\int_0^1 M(x^*, y)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\leqslant\int_0^1 M(x, y^*)\mathrm{d}F^*(x)$$

把上述不等式的第一部分用x代替x^*，并对不等式两端同乘任意分布函数的微分 $\mathrm{d}F(x)$，且对x从 0 到 1 积分，则由S积分性质知有

$$\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y)\mathrm{d}F(x)$$

$$\leqslant\int_0^1\left[\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

把上述不等式的第二部分用 y 代替 y^*，并对任意分布函数 $G(y)$ 作类似处理，同样可得

$$\int_0^1\left[\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)\right]\mathrm{d}G(y)$$
$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

此即

$$\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$
$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y)$$

因而对任意 $F(x)$，$G(y)\in D$，分布函数 $F^*(x)$，$G^*(y)$ 满足

$$\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G^*(y)$$
$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$
$$\leqslant\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y)$$

由定理 1.19 知，$F^*(x)$，$G^*(y)$ 分别为局中人 P_1，P_2 的最优混合策略。其中需要说明的是，$M(x,y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的连续性保证了上述各个 S 积分的存在。 □

定理1.21 设二人零和连续对策 $G=\{S_1, S_2, M\}$ 的支付函数 $M(x,y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续，又设对策 G 的值等于 u，则分布函数 $F^*(x)\in D$ 是局中人 P_1 的最优混合策略的充分必要条件为：对 $[0,1]$ 中的任何 y，有

$$\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\geqslant u \tag{1.16}$$

分布函数 $G^*(y)\in D$ 是局中人 P_2 的最优混合策略的充分必要条件为：对 $[0,1]$ 中的任何 x，有

$$\int_0^1 M(x, y)dG^*(y) \leqslant u \tag{1.17}$$

证明 以下仅对局中人 P_1 进行证明。

必要性. 由定理 1.20 结论易知（1.16）式成立。

充分性. 设分布函数 $F^*(x)$ 对[0, 1]中的所有 y 满足（1.16）式，又设 $\bar{G}(y)$ 为局中人P_2的最优混合策略，对(1.16)式两端同乘 $d\bar{G}(y)$，并对 y 从 0 到 1 积分，则由 S 积分性质知有

$$u = \int_0^1 u d\bar{G}(y) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)dF^*(x)d\bar{G}(y) \tag{1.18}$$

另一方面，由于 $\bar{G}(y)$ 为局中人 P_2 的最优混合策略，由定理 1.19对任意$F(x) \in D$有

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)dF(x)d\bar{G}(y) \leqslant u$$

特别地对 $F^*(x) \in D$ 有

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)dF^*(x)d\bar{G}(y) \leqslant u$$

由上式和（1.18）式可得

$$u = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)dF^*(x)d\bar{G}(y) \tag{1.19}$$

此外，对[0, 1]中的任何 y，由（1.16）式还可得

$$\int_0^1 M(x, y)dF^*(x)$$
$$\geqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)dF^*(x)d\bar{G}(y) \tag{1.20}$$

由于分布函数 $\bar{G}(y)$ 为局中人 P_2 的最优策略，根据定理 1.20对任意 $x \in [0, 1]$有

$$u \geqslant \int^1 M(x, y)d\bar{G}(y) \tag{1.21}$$

综合（1.19）、（1.20）、（1.21）式可得对任意 $x, y \in [0, 1]$有

$$\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}\overline{G}(y)$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}\overline{G}(y)$$

$$\leqslant \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)$$

于是，由定理 1.20 可知分布函数 $F^*(x)$ 是局中人 P_1 的最优混合策略。

对局中人 P_2 可仿此由读者证明。 □

定理1.22 设二人零和连续对策 $G=\{S_1, S_2, M\}$ 的支付函数 $M(x, y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续，r 为实数，$F^*(x)$，$G^*(y)$ 为定义在$[0, 1]$上的两个分布函数，并满足对$[0, 1]$上的任意 x，y 有

$$\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\leqslant r\leqslant \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x) \tag{1.22}$$

则 r 是这个对策 G 的值。$F^*(x)$，$G^*(y)$ 分别为局中人 P_1，P_2 的最优混合策略。

证明 对任意分布函数 $F(x)$，$G(y)$，在（1.22）的左端不等式两边同乘 $\mathrm{d}F(x)$ 并对 x 从 0 到 1 积分，在（1.22）的右端不等式两边同乘以 $\mathrm{d}G(y)$，并对 y 从 0 到 1 积分，则由 S 积分性质可得

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y)\mathrm{d}F(x)\leqslant \int_0^1 r\mathrm{d}F(x)=r$$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}G(y)\leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y)$$

设对策 G 的值为 u，根据定义 1.8 并利用上式有

$$
\begin{aligned}
u &= \min_{G\in D}\ \max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)\\
&\leqslant \max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G^*(y)\\
&\leqslant r\leqslant \min_{G\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y)\\
&\leqslant \max_{F\in D}\ \min_{G\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)\\
&= u
\end{aligned}
$$

因此 $r=u$，即 r 为对策 G 的值。

由于在所设（1.22）式中 r 为对策 G 的值，根据定理 1.21 可知 $F^*(x)$，$G^*(y)$ 分别为局中人 P_1，P_2 的最优混合策略。

□

定理1.23 设二人零和连续对策 $G=\{S_1,\ S_2,\ M\}$ 的支付函数 $M(x,\ y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续，并满足 $M(x,\ y)=-M(y,\ x)$，则对策 G 的值为 0，并且两个局中人有相同的最优混合策略。

证明 设 $F^*(x)$，$G^*(y)$ 分别是局中人 P_1，P_2 的最优混合策略，则对一切 F、$G\in D$ 有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G^*(y)\\
\leqslant &\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)\\
\leqslant &\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y) \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

由假设 $M(x,\ y)=-M(y,\ x)$，因而上述不等式可变换为

$$\int_0^1\int_0^1 M(y, x)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\geqslant -\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\geqslant \int_0^1\int_0^1 M(y, x)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y)$$

将上述不等式左右两端的积分变量对换，可得对任何F、$G\in D$有如下不等式成立

$$\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(x)\mathrm{d}F(y)$$

$$\geqslant -\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$\geqslant \int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G(x)\mathrm{d}F^*(y) \qquad (1.24)$$

由定理1.22及上式可得知

$$u = -\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

但由（1.23）式知应有

$$u = \int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

因而可得$u=0$

此外由（1.24）式还可得知F^*为局中人P_2的最优混合策略，G^*为局中人P_1的最优混合策略，但根据本定理前述假设可得$F^*=G^*$。 □

引理1.24 设$f(x)$，$g(x)$是$[0, 1]$上的连续函数，$F(x)$，$G(x)$是定义在$[0, 1]$上的分布函数，则有

$$\max_{F\in D}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)$$

$$\min_{G\in D}\int_0^1 g(y)\mathrm{d}G(y) = \min_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y)$$

证明 设

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f(a) \tag{1.25}$$

则

$$f(x)\leqslant f(a),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

故对于每一定义于[0，1]的分布函数$F(x)$有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)\leqslant\int_0^1 f(a)\mathrm{d}F(x)=f(a)$$

因此

$$\sup_{F\in D}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)\leqslant f(a)$$

另一方面，对于阶梯函数$I_a(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<a\\ 1, & a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$有

$$f(a)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_a(x)\leqslant\sup_{F\in D}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)$$

因而有

$$\sup_{F\in D}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)=f(a)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_a(x)$$

此说明当$F(x)=I_a(x)$时，积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)$达到它关于$F$的上确界$f(a)$，即有

$$\sup_{F\in D}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)=\max_{F\in D}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)$$
$$=f(a)$$

再注意到(1.25)即可得

$$\max_{F\in D}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}F(x)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)$$

同理可证

$$\min_{G\in D}\int_0^1 g(y)\mathrm{d}G(y)=\min_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y)$$

定理1.25 设二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$的支付函数$M(x, y)$在区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续。则分布函数$F^*(x)$、$G^*(y)\in D$分别是局中人P_1，P_2的最优混合策略的充分必要条件为

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)=E(F^*, G^*)$$

证明 由定义1.8知F^*，G^*是对策G在混合策略意义下解的充要条件为

$$\max_{F\in D}\min_{G\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$$

$$=E(F^*, G^*)$$

$$=\min_{G\in D}\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$$

由引理1.24有

$$\max_{F\in D}\int_0^1\left[\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G(y)\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)dG(y)$$

注意到$M(x, y)$的连续性假设，因而由定理1.18及上式可得

$$\min_{G\in D}\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\min_{G\in D}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G(y)$$

$$=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y)$$

同理可证

$$\max_{F\in D}\min_{G\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$$

$$=\max_{F\in D}\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)$$

综上所述可得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y)=E(F^*, G^*)$$

$$=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\int_0^1 M(x, y)dF^*(x)$$ □

定理1.26 设二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$的支付函数$M(x, y)$在区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续，$0\leqslant a\leqslant 1$．阶梯函数$I_a(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<a\\ 1, & a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$则阶梯函数$I_a(x)$是局中人$P_1$的最优混合策略的充分必要条件为：$I_a(x)$的间断点$a$满足方程

$$u=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}M(a, y) \tag{1.26}$$

其中u为对策G的值且满足

$$u=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min_{0\leqslant y\leqslant 1}M(x, y)$$

阶梯函数$I_b(y)$是局中人P_2的最优混合策略的充分必要条件为：$I_b(y)$的间断点b满足方程

$$u=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}M(x, b)$$

其中u为对策G的值且满足

$$u = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y)$$

证明 先对局中人P_1进行证明。

必要性。设$I_a(x)$为局中人P_1的最优混合策略，$G^*(y)$为局中人P_2的最优混合策略，u为对策G的值。

令

$$K(y) = \int_0^1 M(x, y) \mathrm{d}I_a(x), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

由定理1.21

$$K(y) \geqslant u, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

因而

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} K(y) \geqslant u$$

我们将证明 $\min\limits_{0 \leqslant y \leqslant 1} K(y) = u$，设其不然，若

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} K(y) > u$$

则对一切$0 \leqslant y \leqslant 1$，$K(y) > u$。于是由定义1.8可推得下述矛盾结论：

$$u = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y) \mathrm{d}I_a(x) \mathrm{d}G^*(y)$$

$$= \int_0^1 K(y) \mathrm{d}G^*(y)$$

$$> \int_0^1 u \mathrm{d}G^*(y) = u$$

故有

$$u = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} K(y) = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \int_0^1 M(x, y) \mathrm{d}I_a(x)$$

$$= \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(a, y)$$

充分性。若a为满足（1.26）式的区间〔0，1〕上的任一数，则对一切$0 \leqslant y \leqslant 1$有

$$u \leqslant M(a, y) = \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}I_a(x)$$

于是，由定理1.21知$I_a(x)$为局中人P_1的最优混合策略。又由定义1.8对策值

$$u = \max_{F(x)\in D} \min_{G(y)\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$$

上式取$F(x)=I_a(x)$，则由引理1.24可得

$$u = \max_{I_a(x)\in D_1} \min_{G(y)\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}I_a(x)\mathrm{d}G(y)$$

$$= \max_{0\leqslant a\leqslant 1} \min_{G(y)\in D} \int_0^1 M(a, y)\mathrm{d}G(y)$$

$$= \max_{0\leqslant a\leqslant 1} \min_{0\leqslant y\leqslant 1} M(a, y)$$

$$= \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \min_{0\leqslant y\leqslant 1} M(x, y)$$

其中D_1表示所有具有一个阶梯的阶梯函数所成之集合。

到此，定理对局中人P_1的证明全部完成。对局中人P_2的证明仿此由读者完成。 □

例1.14 给定二人零和连续对策$G=\{S_1, S_2, M\}$的支付函数$M(x, y)=(x-y)^2$，验证对策G的值$u=\frac{1}{4}$，分布函数$F^*(x)=\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)$，$G^*(y)=I_{1/2}(y)$分别为局中人$P_1$、$P_2$的最优混合策略。

解 因支付函数$M(x, y)=(x-y)^2$在区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续，由定理1.22只需证明对$[0, 1]$中的任何x，y均有

$$\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y) \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}F^*(x)$$

即可，由于有

$$\int_0^1 M(x, y)dG^*(y)$$

$$=\int_0^1 (x-y)^2 dI_{1/2}(y)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\int_0^1 M(x, y)dF^*(y)$$

$$=\int_0^1 (x-y)^2 d\left[\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(1-y)^2$$

容易证明，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，对一切 $0\leqslant x\leqslant 1$ 成立；

$\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(1-y)^2\geqslant\frac{1}{4}$，对一切 $0\leqslant y\leqslant 1$ 成立。

因此验证了对策G的值等于$\frac{1}{4}$，$F^*(x)=\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)$，$G^*(y)=I_{1/2}(y)$分别为局中人$P_1$、$P_2$的最优混合策略。

例1.15 已知二人零和连续对策$G=\langle S_1, S_2, M\rangle$的支付函数$M(x, y)=|y-x|(1-|y-x|)$，对策值为$\frac{1}{6}$，试证明分布函数$F^*(x)=x$，$G^*(y)=y$分别为局中人$P_1$与$P_2$的最优混合策略。

证明 对任何在〔0，1〕中的y有

$$\int_0 M(x, y)dF^*(x)=\int_0^1 |y-x|(1-|y-x|)dx$$

$$=\int_0^y (y-x)[1-(y-x)]dx$$

$$+\int_y^1 (x-y)[1-(x-y)]dx=\frac{1}{6}$$

同理对任何在〔0，1〕中的x有

$$\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}G^*(y)=\int_0^1 |y-x|(1-|y-x|)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}$$

因此对〔0，1〕中的任何x，y满足

$$\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\geqslant\frac{1}{6}\geqslant\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}G^*(y)$$

由定理1.21可知$F^*(x)=x$，$G^*(y)=y$分别为局中人P_1与P_2的最优混合策略。

（四）最优策略的求解方法

二人零和连续对策目前尚无一般解法，故以下通过例题来介绍一些特殊解法。

例1.16 设二人零和连续对策$G=\{S_1,\ S_2,\ M\}$的支付函数为

$$M(x,\ y)=\frac{1}{1+\frac{5}{4}(x-y)^2}$$

试求局中人P_1，P_2以阶梯函数表述的最优混合策略。

解 设局中人P_1，P_2的最优混合策略具有下列形式

$$F^*(x)=I_c(x)$$

$$G^*(y)=\beta I_b(y)+(1-\beta)I_a(y)$$

其中a，b，c，β为待定常数。$0\leqslant\beta\leqslant1$。

利用S积分的性质有

$$u=\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1+\frac{5}{4}(x-y)^2}\mathrm{d}I_c(x)\mathrm{d}[\beta I_b(y)$$

$$+(1-\beta)I_a(y)]$$

$$=\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}+\frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}$$

$$\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F^*(x)=\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-y)^2}$$

由定理1.21得知$F^*(x)$为局中人P_1的最优混合策略的充要条件为对〔0，1〕中的任何y有

$$\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}F^*(x)\geqslant u$$

以所设$M(x,\ y)$，$F^*(x)$代入有

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-y)^2}\geqslant\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}+\frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2} \tag{1.27}$$

特殊地取$y=c\in$〔0，1〕应有

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}\geqslant\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}+\frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}$$

化简可得

$$\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}\geqslant\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} \tag{1.28}$$

显然$\beta\neq 0$，否则，局中人P_2的最优混合策略变为纯策略$y=c$，

局中人P_1的最优混合策略根据假设就是纯策略 $x=a$，因而支付函数 $M(x, y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 内具有鞍点 $x^*=a$，$y^*=c$，但根据定义1.7容易判断$M(x, y)$在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 内不存在鞍点，故 (1.28) 可写为

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}\leqslant\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}$$

在 (1.27)中令 $y=b\in[0, 1]$ 采用类似的处理方法，同样可得

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}\geqslant\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}$$

故

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}=\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}$$

将上式代回 (1.27) 式，则对一切 $0\leqslant y\leqslant 1$ 有

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}\leqslant\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-y)^2}$$

因此对$\forall y\in[0, 1]$有$(a-b)^2\geqslant(a-y)^2$。由上式可以断定或有 $b=0\left(当\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1时\right)$，或有 $b=1\left(当 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}时\right)$，两者必居其一。采用同样的方法讨论还可得到$(a-c)^2\geqslant(a-y)^2$对$\forall y\in[0, 1]$ 成立，因而还可断言或有 $c=0\left(当\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1时\right)$，或有 $c=1\left(当 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\right)$，两者必居其一。然而 $b\neq c$，否则支付函数在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 内将有鞍

点．但这是不可能的．注意到 a、b、c 取值的上述限制．为此可取 $a=\frac{1}{2}$，$b=0$，$c=1\left(\text{或}\ a=\frac{1}{2},\ b=1,\ c=0\right)$．

以下来确定 β：

令
$$\widetilde{G}(x)=\int_0^1 M(x,\ y)\mathrm{d}G^*(y)$$
$$=\frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(x-1)^2}+\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}x^2}$$

由定理1.21知对一切 $0\leqslant x\leqslant 1$ 有 $\widetilde{G}(x)\leqslant u$，但我们可以断言 $\widetilde{G}\left(\frac{1}{2}\right)=u$

设其不然，则 $\widetilde{G}\left(\frac{1}{2}\right)=u-2\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$．因 $\widetilde{G}(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上为连续函数，故只要 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$，就有
$$\widetilde{G}(x)\leqslant u-\varepsilon$$
又根据定义1.9及 S 积分性质有
$$u=\int_0^1\widetilde{G}(x)\mathrm{d}F^*(x)$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}-\delta}\widetilde{G}(x)\mathrm{d}F^*(x)$$
$$+\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}}\widetilde{G}(x)\mathrm{d}F^*(x)$$
$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\widetilde{G}(x)\mathrm{d}F^*(x)$$

$$\leqslant u\int_{0}^{\frac{1}{2}-\delta}\mathrm{d}F^{*}(x)+(u-e)\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}F^{*}(x)$$

$$+u\int_{\frac{1}{2}}^{1}dF^{*}(x)$$

$$=u-e\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}F^{*}(x)$$

$$=u-e\left[F^{*}\left(\frac{1}{2}\right)-F^{*}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\right]$$

因$F^{*}(x)=I_{1/2}(x)$，由阶梯函数定义

$$F^{*}\left(\frac{1}{2}\right)-F^{*}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)=1-0=1$$

故得出$u\leqslant u-e$，这是不可能的。因此

$$\widetilde{G}\left(\frac{1}{2}\right)=u$$

又因为对一切$0\leqslant x\leqslant 1$，$\widetilde{G}(x)\leqslant u$，故

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\widetilde{G}(x)\leqslant u$$

我们断言$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\widetilde{G}(x)=u$。设其不然，$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\widetilde{G}(x)<u$，则对一切$0\leqslant x\leqslant 1$，$\widetilde{G}(x)<u$，这与$\widetilde{G}\left(\frac{1}{2}\right)=u$产生矛盾。因此

$$\widetilde{G}\left(\frac{1}{2}\right)=u=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\widetilde{G}(x)$$

又$\widetilde{G}(x)$在$0\leqslant x\leqslant 1$内可微，因而由上式可得极值存在的必要条件

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{G}(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=0$$

由此即可解得 $\beta=\frac{1}{2}$。

最后得出：

$$F^*(x)=I_{1/2}(x),\ G^*(y)=\frac{1}{2}I_0(y)+\frac{1}{2}I_1(y)$$

对策值 $v=\frac{16}{21}$。

上述例题给我们提供了一种求解二人零和连续对策的实用方法（只要支付函数 $M(x,\ y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续），即假设局中人的最优混合策略为具有间断点待定的阶梯函数形式或间断点待定的阶梯函数的凸线性组合形式。然后通过最优混合策略的判别定理计算出间断点，从而可最后确定局中人的最优混合策略。这种方法的根据是某些连续对策的最优混合策略以某种概率分布选取〔0，1〕中的某一个数或某几个数，因而其分布函数以阶梯函数形式出现。

例1.17　二人零和连续对策 G 的支付函数 $M(x,\ y)=\sin 2\pi(x-y)$，试求局中人具有下列形式的最优混合策略。

$$F^*(0)=0,\ F^*(x)=a_1+a_2x,\ \ x\neq 0$$

$$G^*(0)=0,\ G^*(y)=b_1+b_2y,\ \ y\neq 0$$

其中 a_1、a_2、b_1、b_2 为待定常数。

解　注意到最优混合策略是定义在〔0，1〕上的概率分布函数，故应有

$$F^*(1)=a_1+a_2=1,\ G^*(1)=b_1+b_2=1$$

因而

$$F^*(x)=a_1+(1-a_1)x,\ \ x\neq 0$$

$$G^*(y)=b_1+(1-b_1)y,\ \ y\neq 0$$

又因

$$M(x,\ y)=\sin 2\pi(x-y)$$
$$=-\sin 2\pi(y-x)=-M(y,\ x)$$

根据定理1.23对策值 $v=0$，且两个局中人共有相同的最优混合策略，故 $a_1=b_1$。显然（0，0）非 $M(x,y)$ 的鞍点，故 $a_1\neq 1$。

令 $\widetilde{G}(x)=\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G^*(y)$，与例1.16推导一样，我们可以断言，对 $0<x<1$ 中的任一 x，$\widetilde{G}(x)=u=0$，即 $\int_0^1 \sin 2\pi(x-y)\mathrm{d}G^*(y)=0$，因分布函数 $G^*(y)$ 仅在 $y=0$ 处间断且跃度为 a_1。故由 S 积分性质我们得到

$$\int_0^1 \sin 2\pi(x-y)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$=a_1\sin 2\pi(x-0)+(1-a_1)\int_0^1 \sin 2\pi(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=a_1\sin 2\pi x-\frac{1-a_1}{2\pi}[\cos(-2\pi x)-\cos(2\pi(1-x))]$$

$$=a_1\sin 2\pi x$$

因而，对 $(0, 1)$ 中任一 x，$a_1\sin 2\pi x=0$，故 $a_1=0$，从而求得

$$F^*(x)=x,\ G^*(y)=y,\ u=0$$

由定理1.21及 S 积分性质，容易验证 $F^*(x)=x$，$G^*(y)=y$ 为局中人 P_1，P_2 的最优混合策略。

最后，我们举一个应用例子，这个例中的支付函数为非连续函数，但确又存在对策的解，可见连续对策有解的基本定理1.18还可作某些推论，有兴趣的读者可查阅参考文献〔26〕。

例1.18　延迟发射问题

当预定要发射一颗导弹时，在发射前为搜寻目标有一段暴露时间，假定局中人 P_1 计划在 T 小时内发射一颗导弹，但在发射前局中人不得不先暴露 e 小时，显然 $e<T$。在这段暴露时间内导弹有遭到敌人（局中人 P_2）袭击的危险。我们假设局中人 P_2 在不知道局中人 P_1 的决定的情况下只有一次袭击机会。求局中人 P_1 暴露导弹的最优时间。

局中人 P_1 的一个纯策略是选择时刻 X 开始暴露。由于搜寻目标需要暴露 e 小时，因而 $0\leqslant X\leqslant T-e$。因为局中人 P_2 不知

道P_1的抉择。所以P_2的一个纯策略是选择时刻Y对局中人P_1进行袭击，显然$0\leqslant Y\leqslant T$。

导弹在暴露时间内如果未遭到P_2的袭击，则局中人P_1将在$X+e$这一时刻发射这枚导弹。因此，如果局中人P_2在导弹暴露期间之前或之后进行袭击，局中人P_1就能成功地将导弹发射出去以击中目标。

支付规则为：若局中人P_1将导弹发射出去，P_2支付给P_1为1，否则为0，因此支付函数$M(x, y)$为下列非连续函数

$$M(X, Y)=\begin{cases}1, & Y\leqslant X\leqslant T-e \text{ 或 } X+e\leqslant Y\leqslant T;\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

令$t=\dfrac{e}{T}$，$x=\dfrac{X}{T}$，$y=\dfrac{Y}{T}$，则局中人P_1的纯策略集为无限集$S_1=[0, 1-t]$。局中人P_2的纯策略集为无限集$S_2=[0, 1]$，支付函数变为

$$M(x, y)=\begin{cases}1, & y\leqslant x\leqslant 1-t \text{ 或 } x+t\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其它情形。}\end{cases}$$

我们假定$t\leqslant\dfrac{1}{2}$，容易证明

$$0=\max_x \min_y M(x, y)<\min_y \max_x M(x, y)=1$$

因此，对策在纯策略意义下无解，只能考虑对策在混合策略意义下的解。

设分布函数$F(x)$，$G(y)\in D$分别为局中人P_1、P_2的混合策略，则局中人P_1的期望支付值为

$$\begin{aligned}E(F, G)&=\int_0^{1-t}\int_0^1 M(x, y)\mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F(x)\\&=\int_0^{1-t}\int_0^x \mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F(x)\\&\quad+\int_0^{1-t}\int_{x+t}^1 \mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F(x)\end{aligned}$$

$$=\int_0^{1-t}[G(x)+1-G(x+t)]\mathrm{d}F(x)$$

故

$$\inf_{G\in D}\sup_{F\in D}E(F,G)$$

$$=\inf_{G\in D}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[G(x)+1-G(x+t)]$$

$$=1-\sup_{G\in D}\inf_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[-G(x)+G(x+t)]$$

令 $\alpha(G)=\inf\limits_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[G(x+t)-G(x)]$，则对一切 x $(0\leqslant x\leqslant 1-t)$ 有

$$\alpha(G)\leqslant G(x+t)-G(x)$$

或

$$G(x+t)\geqslant G(x)+\alpha(G)$$

令 $x=0$，t，$2t$，…，$(n-1)t$，我们可得到

$$G(t)\geqslant\alpha(G)$$

$$G(2t)\geqslant G(t)+\alpha(G)\geqslant 2\alpha(G)$$

…………………………………………………………

$$G(nt)\geqslant n\alpha(G)$$

其中 $nt\leqslant 1<(n+1)t$。于是，对于一切 G 有

$$n\alpha(G)\leqslant G(nt)\leqslant G(1)=1$$

即

$$\alpha(G)\leqslant\frac{1}{n}$$

因而

$$\sup_{G\in D}\inf_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[G(x+t)-G(x)]\leqslant\frac{1}{n}$$

我们要证明上式中等号成立，若 $1/t$ 为正整数 n，即 $nt=1$，考虑分布函数 $G^*(y)=y$，则

$$\inf_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[G^*(x+t)-G^*(x)]=t=\frac{1}{n}$$

因此

$$\sup_{G\in D}\inf_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[G(x+t)-G(x)]=\frac{1}{n}$$

若 t 不是正整数，设$[1/t]=n$，考虑分布函数

$$G^*(y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I_{\frac{j}{n+1}}(y)$$

则

$$\inf_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[G^*(x+t)-G^*(x)]$$

$$=\inf_{0\leqslant x\leqslant 1-t}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(I_{\frac{j}{n+1}}(x+t)-I_{\frac{j}{n+1}}(x)\right)$$

$$=\frac{1}{n}$$

因此

$$\sup_{G\in D}\inf_{0\leqslant x\leqslant 1-t}[G(x+t)-G(x)]$$

$$=\frac{1}{n}=\frac{1}{\left[\frac{1}{t}\right]}$$

故

$$\inf_{G\in D}\sup_{F\in D}E(F,G)=1-\frac{1}{\left[\frac{1}{t}\right]}$$

类似的可证明

$$\sup_{F\in D}\inf_{G\in D}E(F,G)=1-\frac{1}{\left[\frac{1}{t}\right]}$$

因而对策值

$$u = 1 - \frac{1}{\left[\frac{1}{t}\right]}$$

并同时得知局中人P_2的最优混合策略为

$$G^*(y) = \begin{cases} y, & 若\frac{1}{t} = n \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{\frac{j}{n+1}}(y), & 若\left[\frac{1}{t}\right] = n \end{cases}$$

以下验证局中人P_1的一个最优混合策略是

$$F^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} I_{jt}(x)$$

分两种情形考虑：

首先，假定 $t = 1/n$，即 $1/t$ 是一个正整数，此时有

$$E(F^*, G) = \int_0^{1-t} [G(x) + 1 - G(x+t)] \mathrm{d}F^*(x)$$

$$= 1 - \int_0^{1-t} [G(x+t) - G(x)] \mathrm{d}F^*(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{1-t} [G(x+t) - G(x)] \mathrm{d}I_{jt}(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} [G(jt+t) - G(jt)]$$

$$= 1 - \frac{1}{n}[G(1) - G(0)]$$

$$= 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{\left[\frac{1}{t}\right]}$$

其次，设$\frac{1}{n+1}<t<\frac{1}{n}$，则对一切$G\in D$有

$$E(F^*, G)=\int_0^{1-t}[G(x)+1-G(x+t)]dF^*(x)$$

$$=1-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}[G(jt+t)-G(jt)]$$

$$=1-\frac{1}{n}[G(nt)-G(0)]$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{\left[\frac{1}{t}\right]}$$

因此不论$1/t$是否为正整数，对一切$G\in D$均有

$$E(F^*, G)\geqslant v=1-\frac{1}{\left[\frac{1}{t}\right]}$$

由定理1.21可知$F^*(x)$为局中人P_1的最优混合策略。

综合上述结论可得：对策值

$$v=1-\frac{1}{\left[\frac{T}{t}\right]}$$

局中人P_1的最优混合策略为

$$F^*(x)=\frac{1}{\left[\frac{T}{e}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{T}{t}\right]-1}I_{\frac{je}{T}}(x),$$

局中人P_2的最优混合策略为

$$G^*(y)=\begin{cases} [illegible](y), & \text{若}\frac{T}{e}\text{为正整数。} \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I_{\frac{j}{n+1}}(y), & \text{若}\frac{T}{e}\text{非整数，且}\left[\frac{T}{e}\right]=n\text{。} \end{cases}$$

§1.4* n人零和对策

我们已讨论了二人零和对策，二人零和对策的特点是参加对策的双方具有对立的利害关系，不是输，就是赢，没有任何调和的余地。在n人零和对策中（$n \geqslant 3$），虽然也有利害的冲突、对立，但这些已退出核心位置。而联盟、合作、合伙则占有更重要的地位。在二人零和对策中，不会产生联盟的问题，因为一出现联盟就不可能构成对策。然而在三人对策以至于n人对策中，由于局中人数量的增加，不仅使局中人之间形成的各式各样的联盟有了存在的可能性，更主要的是，这类联盟的存在真正反映出客观世界中实际进行的各种各样的对策的实质。因此，无论从理论上，还是从实践上，都有对n人对策进行研究的必要。

（一）n人零和有限不结盟对策

在n人对策中，如果局中人之间没有任何的联盟，称此对策为不结盟对策。反之，称为结盟对策。

设有n个局中人，用$P_1, P_2, \cdots, P_n$表示，简记为1，2，…，n。局中人构成的集合用I表示，即$I = \{1, 2, \cdots, n\}$。再设局中人P_i的纯策略集是S_i，S_i的元素用S_{i1}，S_{i2}，…，S_{im_i}表示，即

$$S_i = \{S_{i1}, S_{i2}, \cdots, S_{im_i}\}$$

每一个局中人P_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）都可从自己的纯策略集S_i中，选取一个纯策略S_{ij_i}，用各S_{ij_i}构成一个向量$S = (S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n})$，其中$S_{1j_1} \in S_1$，$S_{2j_2} \in S_2$，…，$S_{nj_n} \in S_n$，并称此向量$S$为一个纯局势或状态。所有的纯局势构成的集记为$\overline{S}$，则

$$\overline{S} = \{S\} = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$$

$$= \{S = (S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n}) | S_{ij_i} \in S_i, \ i \in I\}$$

在每一纯局势$S=(S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n})$出现时，各个局中人都有自己的支付（或赢得）。设在纯局势S中，局中人i（$i=1, 2, \cdots, n$）的支付为

$$H_i(S)=H_i(S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n}), \quad i=1, 2, \cdots, n$$

显然，$H_i(S)$（$i=1, 2, \cdots, n$）是S上的实值函数。如同在二人对策中那样，我们称$H_i(S)$为局中人i的支付函数。

我们称三元体$G=\{I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i(S)\}_{i\in I}\}$，$I=\{1, 2, \cdots, n\}$为正规型$n$人不结盟对策。若对每一个$i$，$S_i$的元素个数是有限的，称此对策$G$是有限的。$S_i$是局中人$i$的纯策略集。$H_i(S)$是在纯局势$S$中，局中人$i$的支付（或支付函数）。与二人零和有限对策类似，我们可以如下解释对策G：每个局中人i，彼此独立地从各自的纯策略集S_i中选取了一个纯策略S_{ij_i}后，形成了一个纯局势$S=(S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n})$。为了简便，以后称之为局势，因而对策的这一局便告结束。根据对策规则，每一个局中人i（$i=1, 2, \cdots, n$）可得到一笔收入$H_i(S)$（若某些$H_i(S)<0$，则表示那些局中人付出而非收入）。如果$\sum_{i=1}^{n} H_i(S)=0$，则称这类对策是零和的，它表示某个或某些局中人收入的数目，刚好就是参加这局对策的其他局中人支出的总和。本节我们仅限于讨论n人零和有限对策的情形。虽然每一个参加对策的局中人都渴望自己获得最大收入，然而，这并不是一厢情愿的事情。局中人想把自己收入的愿望变成现实，将有赖于局势的构成。由于每一个局中人又只能部分地影响局势。因此要实现收入的愿望，就得用对策的理论来指导局中人的行为。如果仅凭侥幸，凭自己狭隘的经验去参加对策，则其结果将难免失败。

为了介绍什么样的纯策略对局中人有利？为此，先引入记号：$S\|S_{i_0}$。它表示在局势$S=(S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n})$中，局中人$i$在纯策略集$S_i$中，将纯策略$S_{ij_i}$换成了纯策略$S_{ij_{i_0}}$后而形

成的局势，即

$$S\|S_{i_0}=(S_{1j_1},\ \cdots,\ S_{i-1,j_{i-1}},\ S_{ij_{i_0}},\ S_{i+1,j_{i+1}},\ \cdots,\ S_{nj_n})$$

如果存在一个局势 S，对于局中人 i 的任何纯策略 $S_{ij_{i_0}}\in S_i$ 都恒有

$$H_i(S)\geqslant H(S\|S_{i_0})$$

则称局势 S 对局中人 i 是有利的。

不等式 $H_i(S)\geqslant H_i(S\|S_{i_0})$ 的意义是明显的，它表示当其他局中人所选的纯策略不变时，若局中人 i 任意地改换纯策略后所得到的收入，都不如在局势 S 中选定的那个纯策略而得的收入多。这是和我们日常生活中所讲的“有利”含义是一致的。

定义1.9 如果存在一个局势 S，对全部的局中人均有利，称此局势 S 为对策的平衡局势。

平衡局势的概念是很重要的。绝大多数有关对策论方面的研究工作，都是研究关于平衡局势的存在及其解释、性质以及平衡局势的求解方法等问题。因此，有人认为，现代对策理论实质上就是关于对策的平衡局势的理论。

由平衡局势的定义我们知道，如果 S 是对策的平衡局势，则每一个局中人 i 都对在局势 S 中自己所选取的纯策略感到满意(因为此时收入最多)，而且，任何一个局中人想改换自己已采用的纯策略的话，均意味着其收入将减少。因此，这种平衡局势是参加对策的每一个局中人都乐于接受的，而且对每个局中人都具有吸引力。相反，在任何一个非平衡局势中，由于至少有一个局中人不满意他处于的那个局势（因为此时该局中人的收入要低于在平衡局势时的收入），这就促使他改变纯策略，一直达到平衡局势为止。由此看来，平衡局势具有某种程度的稳定性。谁破坏稳定性（如果他改变纯策略），他就将受到减少收入的惩罚。

特殊地当局中人只有二人时，设 $S^*=(S^*_{1j_1},\ S^*_{2j_2})$ 为平衡局势，则由定义 1.9 有

$$H_1(S^*_{1j_1},\ S^*_{2j_2})\geqslant H_1(S_{1j_1},\ S^*_{2j_2}),\ S_{1j_1}\in S_1$$

$$H_2(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_2}^*)\geqslant H_2(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_k}),\ S_{2j_k}\in S_2$$

因为是零和对策，故

$$H_2(S)=-H_1(S),\ S\in S_1\times S_2$$

由此可得在二人零和对策中，$S^*=(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_2}^*)$ 是平衡局势的充要条件为

$$H_1(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_k})\geqslant H_1(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_2}^*)\geqslant H_1(S_{1j},\ S_{2j_2}^*)$$

其中 $S_{1j}\in S_1$，$S_{2j_k}\in S_2$。据此还可得知平衡局势 $S^*=(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_2}^*)$ 满足如下等式。

$$\sup_{S_{1j}\in S_1}\ \inf_{S_{2j_k}\in S_2} H_1(S_{1j},\ S_{2j_k})=H_1(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_2}^*)$$

$$=\inf_{S_{2j_k}\in S_2}\ \sup_{S_{1j}\in S_1} H_1(S_{1j},\ S_{2j_k})$$

显然，当 $n=2$ 时，平衡局势中的 $S_{1j_1}^*$，$S_{2j_2}^*$ 即为局中人1、局中人2的最优纯策略，而 $(S_{1j_1}^*,\ S_{2j_2}^*)$ 为对策的解。所以，我们有理由认为，平衡局势是最优纯策略所构成的对策解的一种推广。

那么，任何一个 n 人零和有限不结盟对策是否在纯策略意义下都存在一个平衡局势呢？从二人零和有限对策定理1.1可知，结论令人失望，因而可以认为在纯策略意义下任一 n 人零和有限不结盟对策的平衡局势并非永远存在。与二人零和有限对策类似，只要我们对纯策略概念加以扩张，并引入混合策略概念后，就可以证明对策 G 的混合扩张 G^* 必有平衡局势存在。为此，引入下面一些概念。

设 $G=\{I,\ \{S_i\}_{i\in I},\ \{H_i\}_{i\in I}\}$，$I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 是个不结盟的 n 人零和有限对策，局中人 P_i 的策略集为 $S_i=(S_{i1},\ S_{i2},\ \cdots,\ S_{im_i})$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，再设 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\ \alpha_{im_i})$ 为一个概率向量，它表示局中人 i 以 α_{i1} 的概率取纯策略 S_{i1}，以 α_{i2} 的概率取纯策略 S_{i2}，…，以 α_{im_i} 的概率取纯策略 S_{im_i}。与定义1.2类似，我们也定义局中人 i 的混合策略为概率向量 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\ \alpha_{im_i})$，其中 $\alpha_{ij}\geqslant 0$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m_i$，且

$\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}=1$。局中人 i 的全部混合策略所构成的集合用 S_i^* 表示。

因为对策是不结盟的，所以每一个局中人都是独立地选择自己的纯策略 S_{ij_i} 以及他自己的混合策略 α_{ij_i}。于是，出现局势 $S=(S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n})$ 的概率，便由局中人 1 取纯策略 S_{1j_1} 的概率 α_{1j_1}，局中人 2 取纯策略 S_{2j_2} 的概率 α_{2j_2}，…，局中人 n 取纯策略 S_{nj_n} 的概率 α_{nj_n} 决定。由于各局中人选取纯策略的相互独立性，因此，出现局势 $S=(S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n})$ 的概率应等于各个概率 α_{ij_i} 之积。我们称向量 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是一个混合局势。它表示在对策 G 中，局中人 i 从其策略集 S_i 中以概率分布 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 选取纯策略。并规定局中人 $i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的期望支付函数为 $H_i^*(\alpha)$。则显然有 $H_i^*(\alpha)=H_i^*(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=\sum_{S_{1j_1}\in S_1}\cdots\sum_{S_{nj_n}\in S_n} H_i(S_{1j_1}, S_{2j_2}, \cdots, S_{nj_n})\alpha_{1j_1}\cdot\alpha_{2j_2}\cdots\alpha_{nj_n}$。

定义1.10 对于给定的对策 $G=\{I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\}$，依照上述方法构造一个对策 $G^*=\{I, \{S_i^*\}_{i\in I}, \{H_i^*\}_{i\in I}\}$，其中 S_i^* 是局中人 i 的混合策略集，H_i^* 是局中人 i 的支付函数。称对策 G^* 为对策 G 的一个混合扩张（或混合扩充）。

为了简便起见，以后将混合策略、混合局势，分别简称为策略、局势。

定义1.11 在混合扩充 G^* 中，如果对于任何一个局中人 i，以及他的任意一个策略 α_{i_0}，均有不等式

$$H_i^*(\alpha^*)\geqslant H_i^*(\alpha^*\|\alpha_{i_0}),\ \alpha_{i_0}\in S_i^*,\ i=1, 2, \cdots, n$$

成立，其中符号 $\alpha^*\|\alpha_{i_0}$ 表示在混合局势 α^* 中，局中人 i 将其混合策略 α_i 换成 α_{i_0}，则称局势 $\alpha^*=(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*)$ 为 G^* 的一个混合平衡局势（简称平衡局势）。

定理1.27 在对策G^*中，局势$\alpha^*=(\alpha_1^*,\ \alpha_2^*,\ \cdots,\ \alpha_n^*)$为一个平衡局势的充分必要条件是，对于任何局中人$i$，以及他的任意一个纯策略$S_{ij_{i_0}}$，不等式

$$H_i^*(\alpha^*\|S_{ij_{i_0}})\leqslant H_i^*(\alpha^*),\quad S_{ij_{i_0}}\in S_i,\quad i=1,\ 2\cdots,\ n \tag{1.29}$$

成立。

证明 首先说明$H_i^*(\alpha^*\|S_{ij_{i_0}})$的意义，它表示在混合局势$\alpha^*$中，局中人$i$以纯策略$S_{ij_{i_0}}$去替换混合策略$\alpha_i$后所得到的期望支付。

必要性。由于$\alpha^*=(\alpha_1^*,\ \alpha_2^*,\ \cdots,\ \alpha_n^*)$是一个平衡局势，由定义1.11有$H_i^*(\alpha^*)\geqslant H_i^*(\alpha^*\|\alpha_{i_0})$，对任何$\alpha_{i_0}\in S_i^*$（$i=1$，2，…，$n$）成立。特殊地取$\alpha_{i_0}=(0,\ \cdots 0,\ 1,\ 0\cdots 0)$时，该式仍应成立，即有

$$H_i^*(\alpha^*)\geqslant H_i^*(\alpha^*\|\alpha_{i_0})=H_i^*(\alpha^*\|S_{ij_{i_0}}),$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

充分性。用α_{ij_i}乘（1.29）式两端，然后关于$S_{ij_i}\in S_i$求和，得

$$\sum_{S_{ij_i}\in S_i} H_i^*(\alpha^*\|S_{ij_{i_0}})\,\alpha_{ij_i}\leqslant\sum_{S_{ij_i}\in S_i} H_i^*(\alpha^*)\alpha_{ij_i}$$

注意到$H_i^*(\alpha^*)$及$H_i^*(\alpha^*\|S_{ij_i})$的定义，上式左端为$H_i^*(\alpha^*\|\alpha_i)$，而右端为

$$\sum_{S_{ij_i}\in S_i}\alpha_{ij_i}H_i^*(\alpha^*)=H_i^*(\alpha^*)\sum_{S_{ij_i}\in S_i}\alpha_{ij_i}=H_i^*(\alpha^*)$$

因此有

$$H_i^*(\alpha^*\|\alpha_i)\leqslant H_i^*(\alpha^*)$$ □

由定理1.27可知，要判断α^*是否是一个平衡局势只须利用（1.29）式进行判别即可。

定理1.28 任何n人零和有限不结盟对策$G^*=\{I,\ \{S_i^*\}_{i\in I},\ \{H_i^*\}_{i\in I}\}$至少存在一个平衡局势。

证明可查阅参考文献〔10〕。

上述定理是 Nash 于1950年得出的，由此定理可知，n 人零和有限不结盟对策在混合扩充意义下至少有一个平衡局势存在。

（二）特征函数与简化型对策

在 n 人有限不结盟对策的讨论中，各个局中人是在彼此互不通信息的条件下，从各自的策略集中选择策略来进行对策的。但是，在现实生活中，多人对策现象常常会出现各局中人（或部分局中人）彼此交换情报，互通信息，协调行动，以便取得对于自己有利结局的现象。这种相互配合，团结一致，彼此协调的现象，就是对策中的联盟概念的原型。那么，在一个对策中，哪些人结成联盟？如何结盟？在结盟后联盟中的各个局中人应采取什么行动（策略）才是恰当的，什么行动是有害的等等问题，都是对策论中应予讨论的。

在现实生活中，结成联盟的形式是多种多样的，因而也是十分复杂的。联盟的形成可能是由局中人的收支来决定，也可能是由政治的、感情的、心理的因素等来决定的。局中人可以不参加任何联盟，也可以参加一个或多于一个的联盟。在一个联盟内，总的收支可能归联盟集体所有，也还可能在参加联盟的各局中人之间进行再分配。在某些对策现象中，局中人参加某个联盟也可能是无意识的，然而在客观上确实是形成了联盟。总之，形成联盟的原因，以及各局中人怎么行动，怎样进行分配等等，都是一些相当复杂的问题。

尽管迄今已获得的有关结盟对策的理论还不能令人满意，但我们仍将在下面介绍 Neumann 所建立的理论，这是因为这些理论包含了有发展前途的、合理的内容。若在此基础上进一步讨论、发展新的理论，则无疑是有相当作用的。

1. 特征函数及其性质

特征函数的概念在对策论中非常重要，正如Neumann 所说：

"我们希望把零和n人竞赛的全部理论建立在这个函数的基础上"。这里所说的竞赛，就是本书所讲的对策。下面将看到，通过特征函数概念的引入，有关局中人之间的结盟，每个联盟之内局中人之间进行的补偿，以及两个联盟之间的合并及斗争等问题，都能给予确切的描述。

定义1.12 用$I=\{1, 2, \cdots, n\}$表示n人零和有限对策中一切局中人所构成的集合。称I的任一子集T为这个对策的一个联盟。把I中除去T后所成的那个子集记为联盟$-T$。

在上述定义中，有几点值得注意：首先，当T中只有一个元素时，也称T为一个联盟。其次，如果$T=I$，则$-T=\Phi$，我们也把I及Φ当作联盟对待。特别是把Φ当作一个联盟后，会给今后的讨论带来方便，并称它为空联盟。

我们认为，在I中，分成了两个联盟T及$-T$后，T中各局中人在选取策略时，互通信息，彼此合作，协调行动。在$-T$中也是如此。于是，就可以把T当成某个对策中的一个局中人甲，而把$-T$当作这个对策中另一个局中人乙。在这种观点下，上述对策可视作只有两个局中人T及$-T$。设I中的局中人i的纯策略集为S_i，而且在不知道其余$n-1$个局中人选择什么纯策略的情况下，从S_i中选择一个纯策略S_{ik_i}，因而局中人得到收支为$H_i(S_{1k_1}, S_{2k_2}, \cdots, S_{nk_n})$，由于对策是零和的，因此

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(S_{1k_1}, S_{2k_2}, \cdots, S_{nk_n})=0,$$

$$S_{ik_i}\in S_i, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

由于局中人分成了两个联盟T与$-T$，可以把联盟T的纯策略认为是T中各局中人各种纯策略的组合，不妨设T的纯策略为$(S_{i_1k_{i_1}}, S_{i_2k_{i_2}}, \cdots, S_{i_\mu k_{i_\mu}})$，$S_{i_1k_{i_1}}\in S_{i_1}$，$S_{i_2k_{i_2}}\in S_{i_2}$，$\cdots$，$S_{i_\mu k_{i_\mu}}\in S_{i_\mu}$。而$-T$的纯策略为$(S_{j_1k_{j_1}}, S_{j_2k_{j_2}}, \cdots, S_{j_\nu k_{j_\nu}})$，$S_{j_1k_{j_1}}\in S_{j_1}$，$S_{j_2k_{j_2}}\in S_{j_2}$，$\cdots$，$S_{j_\nu k_{j_\nu}}\in S_{j_\nu}$，$\mu+\nu=n$。其中各纯策略

$S_{i_l k_{i_l}}$ $(l=1,\cdots,\mu)$, $S_{j_p k_{j_p}}$ $(p=1,\cdots,\nu)$ 的选取还可以认为是在T及$-T$内部各局中人经过充分协商后确定的。此时，把T看作某一个对策的局中人甲，并把$-T$看作该对策中的另一局中人乙，于是，就构成了一个二人对策。从而局中人甲的总支付为

$$\sum_{i\in T} H_i(S_{1k_1},\ S_{2k_2},\ \cdots,\ S_{nk_n})$$

而$-T$（局中人乙）的总支付为

$$\sum_{i\in -T} H_i(S_{1k_1},\ S_{2k_2},\ \cdots,\ S_{nk_n})$$

因为是零和对策，故有

$$\sum_{i\in T} H_i(S_{1k_1},\ S_{2k_2},\ \cdots,\ S_{nk_n})$$

$$=-\sum_{i\in -T} H_i(S_{1k_1},\ S_{2k_2},\ \cdots,\ S_{nk_n})$$

注意到 $(S_{i_1k_{i_1}},\ S_{i_2k_{i_2}},\ \cdots,\ S_{i_\mu k_{i_\mu}})$ 的元素个数为μ，而$(S_{j_1k_{j_1}},\ S_{j_2k_{j_2}},\ \cdots,\ S_{j_\nu k_{j_\nu}})$ 的元素个数为ν。如果T用混合策略$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_\mu)$，而$-T$用混合策略$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_\nu)$，则局中人甲的期望支付为

$$\sum_{k=1}^{\nu}\ \sum_{j=1}^{\mu}\left[\sum_{i\in T} H_i(S_{1k_1},\ S_{2k_2},\ \cdots,\ S_{nk_n})\right]\alpha_j\beta_k$$

局中人乙的期望支付为

$$\sum_{k=1}^{\nu}\ \sum_{j=1}^{\mu}\left[\sum_{i\in -T} H_i(S_{1k_1},\ S_{2k_2},\ \cdots,\ S_{nk_n})\right]\alpha_j\beta_k$$

令

$$K_T(\alpha,\ \beta)=\sum_{k=1}^{\nu}\ \sum_{j=1}^{\mu}\left[\sum_{i\in T} H_i(S_{1k_1},S_{2k_2},\cdots,S_{nk_n})\right]\alpha_j\beta_k$$

$$K_{-T}(\alpha,\ \beta)=\sum_{k=1}^{\nu}\ \sum_{j=1}^{\mu}\left[\sum_{i\in -T} H_i(S_{1k_1},S_{2k_2},\cdots,S_{nk_n})\right]\alpha_j\beta_k$$

因为对策是零和的，则有

$$K_T(\alpha,\ \beta)=-K_{-T}(\alpha,\ \beta)$$

用S_u表局中人甲的混合策略集，用S_v表局中人乙的混合策略集，若该对策在混合策略意义下有解，则由二人零和对策的基本定理1.5可知有

$$\max_{\alpha\in S_u}\ \min_{\beta\in S_v} K_T(\alpha,\ \beta)=\min_{\beta\in S_v}\ \max_{\alpha\in S_u} K_T(\alpha,\ \beta)$$

因此可引入如下特征函数的定义。

定义1.13 设n人零和有限对策的局中人集合为$I=\{1, 2, \cdots, n\}$，$T\subset I$，把T与$-T$看成一个二人零和有限对策中的局中人，对于T，作一个实值函数

$$u(T)=\max_{\alpha\in S_u}\ \min_{\beta\in S_v} K_T(\alpha,\ \beta)$$

其中α、β分别表示T与$-T$的混合策略。我们称$u(T)$是n人对策的一个特征函数。

由此定义可知，$u(T)$对每一个I的子集是有定义的，并且它表示了联盟T在对策中的总收入。一般来说，仅有总收入还不一定能使这个联盟得以稳定，因为它还有赖于在联盟内各个局中人之间进行的分配状况。虽然如此，特征函数的建立，毕竟使n人对策的理论大大向前跨了一步。

设G是一个n人零和有限对策，$I=\{1, 2, \cdots, n\}$表示局中人所成的集合。设$T\subset I$，$u(T)$为对策G的特征函数。以下定理描述了特征函数的一些主要性质。

定理1.29 设$u(S)$是n人零和有限对策G的特征函数，$S\subset I$，$T\subset I$，则

（1）$u(\Phi)=0$，Φ表空集；

（2）$u(-S)=-u(S)$；

（3）$u(S\cup T)\geqslant u(S)+u(T)$，其中$S\cap T=\Phi$

证明 （1）因Φ为空联盟，故Φ中一个局中人也没有，于是它得到的支付永远是零，因此

$$u(\phi)=0$$

（2）因为在对策G中，$u(S)$与$u(-S)$表示在同一局对策中，S与$-S=I\setminus S$的支付。由于G是零和对策，因此

$$u(S)+u(-S)=0$$

即

$$u(-S)=-u(S)$$

（3）由定义 1.13 知，联盟S保证能够得到的最大支付为$u(S)$。同样，联盟T保证能够得到的最大支付为$u(T)$。因此，联盟$S\cup T$即使当S和T互不合作时也能取得$u(T)+u(S)$。而根据特征函数定义，$u(S\cup T)$是$S\cup T$保证能够得到的最大支付。由此可知应有

$$u(S\cup T)\geqslant u(S)+u(T) \qquad \square$$

（以上证明引自文献〔23〕，我们认为这种证明方法是令人信服的。丝毫无损于论证的严格性。有关形式证明可参见文献〔27〕。）

由定理 1.29 容易得到下述推论。

推论1.30 在定理 1.29 的条件下，有下面的一些结果成立：

（1）$u(I)=0$；

（2）如果S_1，S_2，…，S_p是I中两两互不相交的子集，则有

$$u(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_p)\geqslant u(S_1)+u(S_2)+\cdots+u(S_p)$$

（3）如果$I=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_r$，且$S_1$，$S_2$，…，$S_r$两两互不相交，则

$$u(S_1)+u(S_2)+\cdots+u(S_r)\leqslant 0$$

下面的定理是定理 1.29 的逆定理。

定理1.31 设$I=\{1, 2, \cdots, n\}$，u是定义在I中每一子集的实值函数。并且满足下面三个条件：

（1）$u(\phi)=0$；

（2）$u(-S)=-u(S)$；

（3）若$S\cap T=\phi$，有$u(S\cup T)\geqslant u(S)+u(T)$。

则存在一个n人零和有限对策，该对策的特征函数恰好是u。

证明略。读者可查阅参考文献[23]。

2. 简化型对策及其分类

从定理 1.29 及 1.31 得知，特征函数 $u(S)$ 完全刻划出了一个 n 人零和有限对策的本质。定理 1.29 所描述的有关特征函数的三个性质的重要意义就在于：使我们只需从满足这三个性质的函数本身，而不联系到任何对策来进行研究，这就大大简化了对策的研究工作。

在结盟对策中，为研究方便，我们把具有某种相似性质的对策归入同一类。这样，在每一类中，只需选出一个简单而又有代表性的对策来进行研究即可。为此，先引入策略等价概念。

定义1.14 两个 n 人零和有限对策 G 及 G'，其特征函数分别是 u 及 u'，如果存在一个正数 k 及 n 个实常数 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，使对于任一个 $S \subset I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 有

$$u'(S) = ku(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$$

则称 G 与 G' 是策略等价的。也常常说成特征函数 u 与 u' 是策略等价的，并记成 $u \sim u'$。

由此定义，立即可得到 $u \sim u'$ 的充分条件：

定理1.32 若两个 n 人零和有限对策 G 及 G' 的特征函数分别是 u 及 u'。如果存在 α_i^0（$i = 1, 2, \cdots, n$）并有

1）$H_i'(S_{1k_1}, S_{2k_2}, \cdots, S_{nk_n}) = kH_i(S_{1k_1}, S_{2k_2}, \cdots, S_{nk_n}) + \alpha_i^0$，$k > 0$；

（2）$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 = 0$

则 u 与 u' 策略等价。

证明 由定义 1.14，要证明 $u \sim u'$，只要对任一联盟 $S \subset I$，能找到正数 k 及常数 α_1^0，α_2^0，$\cdots$，α_n^0，使

$$u'(S) = ku(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i^0$$

成立就可以了。

由特征函数定义 1.13 及所设条件（1），对任一联盟 $S\subset I$，显然有

$$u'(S)=\max_{\alpha\in S_x}\min_{\beta\in S_y}K'_S(\alpha,\beta)$$

$$=\max_{\alpha\in S_x}\min_{\beta\in S_y}\sum_{l=1}^{v}\sum_{j=1}^{\mu}\left[\sum_{i\in S}H'_i(S_{1k_1},\right.$$

$$\left.S_{2k_2},\cdots,S_{nk_n})\alpha_l\beta_l\right]$$

$$=\max_{\alpha\in S_x}\min_{\beta\in S_y}\sum_{l=1}^{v}\sum_{j=1}^{\mu}\left\{\sum_{i\in S}[kH_i(S_{1k_1},\right.$$

$$\left.S_{2k_2},\cdots,S_{nk_n})+\alpha_i^{\circ}]\alpha_l\beta_l\right\}$$

$$=ku(s)+\sum_{l=1}^{v}\sum_{j=1}^{\mu}\left[\sum_{i\in s}\alpha_i^{\circ}\right]\alpha_l\beta_l$$

$$=ku(S)+\sum_{i\in S}\alpha_i^{\circ}$$

由此可见 $u\sim u'$。 □

需要说明的是条件（2）是必要的。因为如果 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\circ}$ 不等于零，则至少 G 与 G' 之一便不是零和对策，这是与假设矛盾的。

策略等价的概念表示在两个 n 人零和有限对策 G 及 G' 中。联盟 S 在 G 及 G' 中仅仅是支付不同而已，而在选择策略及组成联盟的动力方面则是一样的。我们还可以这样想象，在对策 G' 里，局中人 i 得到一笔附加收入 α_i°（当 $\alpha_i^{\circ}<0$ 时，表示支出）。除此之外，与在 G 中所得的收入成比例（比例常数 $k>0$）。如果对策支付的办法是，在对策 G' 进行之前就分别付给各个局中

人一笔收入α_1^0，α_2^0，…，α_n^0，然后再开始进行对策G'。那么，一局对策结束后，联盟S在对策G'中的收入为$ku(S)+\sum_{i\in S}\alpha_i^0$，而在对策$G$中的收入则为$u(S)$。这样看来，在对策$G$中一切对联盟$S$有利的策略，从对策$G'$的观点来看也是对联盟$S$有利的。在$G$中对$S$不利的策略，一定在$G'$中也对$S$不利。

定理1.33　设u与u'分别为两个n人零和有限对策中的特征函数，如果$u\sim u'$，则$\sum_{i\in S}\alpha_i^0=0$，其中$\alpha_i^0$之含义见定义1.14。

证明　由$u\sim u'$得

$$u'(S)=ku(S)+\sum_{i\in S}\alpha_i^0,\quad S\subset I$$

令$S=I$，并利用推论1.30即可得证。□

定理1.34　策略等价关系具有自反性，对称性及传递性。即有

(1) $u(S)\sim u(S)$

(2) 若$u'(S)\sim u(S)$，则$u(S)\sim u'(S)$

(3) 若$u(S)\sim u'(S)$，$u'(S)\sim u''(S)$，则$u(S)\sim u''(S)$

证明请读者自行完成，从略。

利用定理1.34结论，可将一切n人零和有限对策分成两两互不相交的类，而在同一类中的对策则彼此等价。这样一来，在一个等价的对策类中，我们就可以根据一定原则选出某个具有代表性的对策来（设该对策的特征函数为$\bar{u}$），当然此原则应使选出的对策比同类的其他对策较为简单。下面我们开始进行这一工作。

我们从一个已知的n人零和有限对策（设其特征函数为$u(S)$）出发，来考虑一个与$u(S)$等价且满足如下条件的特征函数$\bar{u}(S)$：

$$\bar{u}(1)=\bar{u}(2)=\cdots=\bar{u}(n) \tag{1.30}$$

其中 $\bar{u}(i)$ 表示 $S=\{i\}$ 时的特征函数值。条件（1.30）的意义是：我们规定，每个局中人单独参加对策时所得到的支付均相同。

由于$\bar{u}(S)\sim u(S)$，故存在$k>0$及实常数α_i^0，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\bar{u}(S)=ku(S)+\sum_{i\in S}\alpha_i^0,\quad S\subset I.$$

利用条件（1.30）并设其公共值为β，可得

$$ku(1)+\alpha_1^0=ku(2)+\alpha_2^0=\cdots=ku(n)+\alpha_n^0=\beta \tag{1.31}$$

对（1.31）式中的n个等式求和可得

$$k\sum_{i=1}^{n}u(i)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0=n\beta$$

注意到在零和对策中有$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^0=0$，并将上式解出之$\beta$代回（1.31）式可得

$$\alpha_i^0=\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}u(i)-ku(i),$$

$$i=1,2,\cdots,n \tag{1.32}$$

如上所述，从一个已知的特征函数$u(S)$出发，对于任意一个正数$k>0$，根据（1.32）完全可以定出α_i^0（$i=1,2,\cdots,n$），再令

$$\bar{u}(S)=ku(S)+\sum_{i\in S}\alpha_i^0$$

这样一来，$\bar{u}(S)$便与$u(S)$等价了，而且$\bar{u}(S)$满足（1.30）式条件。

定义1.15 如果n人零和有限对策的特征函数$\bar{u}(S)$满足条件（1.30），则称此对策是简化的（或简化型对策）。也称特征函

故 $\bar{u}(S)$ 是简化的。

由上面叙述的理由可知，每个特征函数恰好与一个简化的特征函数等价。而且它由

$$\bar{u}(S)=ku(S)+\sum_{i\in S}\alpha_i^{\prime}, \quad k>0$$

$$\alpha_i^{\prime}=\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}u(i)-ku(i)$$

决定。令

$$\bar{u}(1)=\bar{u}(2)=\cdots=\bar{u}(n)=-r \tag{1.33}$$

则有如下结论。

定理1.35 设 $\bar{u}(S)$ 是简化的特征函数，S 是 I 中一个联盟，S 包含有 p 个局中人，则

$$-pr\leqslant\bar{u}(S)\leqslant(n-p)r$$

证明 由条件，可设 $S=\{k_1, k_2, \cdots, k_p\}$ 令单元素集 $S_1=\{k_1\}$，$S_2=\{k_2\}$，…，$S_p=\{k_p\}$。由推论1.30中的（2）得

$$\bar{u}(S)\geqslant\bar{u}(S_1)+\bar{u}(S_2)+\cdots+\bar{u}(S_p)$$

由简化型定义有 $\bar{u}(i)=-r$ 由此可得

$$\bar{u}(S)\geqslant-pr$$

上述不等式对于有 $n-p$ 个局中人的联盟 $-S$ 亦应成立。并再根据特征函数性质 $\bar{u}(-S)=-\bar{u}(S)$。因此有

$$\bar{u}(-S)\geqslant-(n-p)r$$

即

$$\bar{u}(S)=-\bar{u}(-S)\leqslant(n-p)r$$

综合以上不等式可得

$$-pr\leqslant\bar{u}(S)\leqslant(n-p)r$$ □

在等式（1.33）中，$-r$ 的意义为：在 n 人零和有限对策中，当联盟 S 仅由一个局中人 i 组成并单独参加对策时，他能够得到的支付数为 $-r$，即 $\bar{u}(i)=-r$。但此时由其他 $n-1$ 个

局中人组成的联盟 $-i$ 所能得到的支付数则可为

$$\bar{u}(-i)=-\bar{u}(i)=r$$

下面说明 $r\geqslant 0$，这是因为由推论 1.30 及简化型对策定义，并利用

$$\{I\}=\{1\}\cup\{2\}\cup\cdots\cup\{n\}$$

可得

$$0\geqslant\bar{u}(1)+\bar{u}(2)+\cdots+\bar{u}(n)=-nr$$

由此得 $r\geqslant 0$。

根据 $r>0$ 与 $r=0$，又可把简化型对策分成两种类型。

定义1.16 一个 n 人零和有限对策 G 的特征函数设为 $u(S)$，与其等价的简化型对策的特征函数设为 $\bar{u}(S)$，于是 $\bar{u}(i)=-r$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。当 $r>0$ 时，称此对策是本质的；若 $r=0$ 时，则称此对策是非本质的。

上述定义的意义是很直观的。因为若 G 为非本质时，则由上述定义知 G 中每个局中人 i 单独参加对策时的支付应为 $\bar{u}(i)=-r=0$。而当他们之中几个人组成联盟 S 时，由定理 1.35 可知有

$$-pr\leqslant\bar{u}(S)\leqslant(n-p)r$$

由于 $r=0$，故可得 $\bar{u}(S)=0$。由此看来，在这种情形下，即使结成了联盟，结盟对于联盟内的各个局中人仍然没有多大吸引力（内聚力）。这是因为虽然局中人单独参加对策时，各自的支付数额为零，但结盟后得到的收入也不会比零大。

但是，在本质对策的情形下，由于 $r>0$，因此若各局中人单独参加对策时他得付出 r（因为 $\bar{u}(i)=-r$，而 $r>0$）。而任意 $n-1$ 个局中人结成联盟时将收入 r。此时各局中人的理智抉择必定为组成联盟。

下面给出判断本质或非本质对策的一些准则。

如果 $\bar{u}\sim u$，将（1.32）代入（1.31）式，并令 $\beta=-r$ 由此可得

$$r = -\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n} u(i)$$

于是立即可得下述定理。

定理1.36 G为非本质对策的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} u(i) = 0$$

G为本质对策的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} u(i) < 0$$

定理1.37 设u是n人零和有限对策G的特征函数，则G为非本质对策的充分必要条件是：当S，$T \subset I$，且$S \cap T = \Phi$时满足条件

$$u(S \cup T) = u(S) + u(T)$$

证明 必要性．由特征函数$u(S)$的性质，对任何联盟$S \subset I$，$T \subset I$，$S \cup T \subset I$，应有

$$u(S \cup T) \geqslant u(S) + u(T) \tag{1.34}$$

注意到G为非本质对策，故当$u = \bar{u}$（$\bar{u}$是简化的）时，由定理1.35知，必有

$$u(S) = 0, \quad u(T) = 0, \quad u(S \cup T) = 0$$

由此得知（1.34）式中的不等号不能成立。此外，当$u \sim \bar{u}$时，易知该等式仍成立。

充分性．因为对于任意的S，T，$S \cap T = \Phi$，由假定有

$$u(S \cup T) = u(S) + u(T)$$

特别地，对于仅由一个局中人组成的联盟$\{i\}$，和另一个局中人组成的联盟$\{j\}$，有

$$u(i \cup j) = u(i) + u(j)$$

用归纳法可得

$$u(I)=\sum_{i=1}^{n}u(i)$$

由推论 1.30 有 $u(I)=0$，因此

$$\sum_{i=1}^{n}u(i)=u(I)=0$$

因而由定理 1.36 知，G 为非本质对策。 □

定义1.17 如果 n 人零和有限对策 G 的特征函数恒等于零，则称此对策为零对策。

定理1.38 任意一个非本质对策都策略等价于一个零对策。

证明 由定理 1.37，非本质对策的特征函数 $u(S)$ 是可加的，即对于任一个 $S\subseteq I$ 有

$$u(S)=\sum_{i\in S}u(i)$$

令 u' 由下述等式确定

$$u'(S)=u(S)+\sum_{i\in S}[-u(i)],\quad S\subseteq I$$

可见 $u'\sim u$，且 $u'(S)\equiv 0$。 □

如果把相互策略等价的对策看作一个对策的话，我们来考察三人零和有限对策。由上述定理可知，若该对策是非本质的，则在策略等价意义下，就可认为是一个零对策；若该对策是本质的，则容易确定此对策（即可求解出其特征函数）。因为由本质性应有

$$u(1)=u(2)=u(3)=-r$$

为使问题变得简单，可以事先改变其支付单位，使 $r=1$，显然这总是办得到的。于是有

$$u(1)=u(2)=u(3)=-1$$

故利用特征函数性质：$u(-S)=-u(S)$ 可得

$$u(\{2,3\})=u(\{1,3\})=u(\{1,2\})=1$$

又由特征函数性质还可得

$$u(\phi)=u(\{1,\ 2,\ 3\})=0$$

于是我们看到，三人本质对策的特征函数能完全确定，从而该对策也就可完全确定出来。

（三）联盟与分配

在 n 人零和有限对策中，特征函数只表示联盟的总收入。对这笔收入，在联盟内部如何分配，还是一个重要的问题。分配方案不恰当，任何联盟也是无法形成的。因此，只有涉及到局中人之间的分配时，方可认为真正触及到 n 人零和联盟对策的实质问题。

在对策中，局中人所采取的联盟形式主要取决于总收入的分配方案对各局中人的作用。如果用 x_i 表示局中人 i 在联盟内的收入（如果 x_i 是负数，就表示局中人 i 的支出是$|x_i|$）。于是，参加对策的所有局中人的支付就可用矢量 $(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ 表示。为了研究分配，现给出下述定义。

定义1.18 设 $u(S)$ 是 n 人零和有限对策 G 的特征函数。如果矢量 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，其中 x_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 是实数，满足下述条件：

（1） $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=0$；

（2） $x_i \geqslant u(i)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

则称矢量 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 为对策 G 的一个分配矢量，简称分配。

上述定义中条件（1）的意义是明显的，因为我们所讨论的是零和对策。而条件（2）则表示如果局中人 i 是某个联盟 S 的成员，则他加入联盟后的收入 x_i 不会低于他单独参加对策时的收入 $u(i)$，显然只有这样，联盟对他才有吸引力。反之，如果

有不等式 $u(i)>x_i$，则局中人 i 将不愿意参加联盟。于是联盟便不可能形成，因而分配也就无从谈起。因此，条件（2）是在讨论联盟时的必要条件之一。在此，我们需要强调指出，分配矢量 x 是与某个联盟密切相关的概念，因此离开联盟，分配也就无从谈起。

定理 1.39 在一个 n 人零和有限对策 G 中，矢量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 G 一种分配的充分必要条件为：存在实常数 a_i，$i\in I$ 使有

$$x_i = u(i) + a_i,\quad i\in I \tag{1.35}$$

$$a_i \geqslant 0,\quad i\in I$$

$$\sum_{i\in I} a_i = -\sum_{i\in I} u(i) \tag{1.36}$$

证明 充分件。因 $a_i\geqslant 0$，于是由(1.35)式得 $x_i\geqslant u(i)$。故定义 1.18 中的条件（2）成立。又由式（1.35）与(1.36)还有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}[u(i)+a_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u(i) + \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

因此定义 1.18 中条件（1）亦成立。

必要性。设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 G 的一个分配，令

$$a_i = x_i - u(i) \tag{1.37}$$

则由定义 1.18 中的（2）可得 $a_i\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$。再对（1.37）求和，并注意到分配定义中有 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$。容易验证(1.36) 成立。 □

定理 1.40 任一个非本质对策仅有一种分配：

$$x=(u(1), u(2), \cdots, u(n))$$

证明 考虑任意一个分配 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，由定理

1.39知，存在$\varepsilon_i \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$，使有

$$\beta_i = u(i) + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = -\sum_{i=1}^{n} u(i)$$

因为对策是非本质的，故由定义1.16有

$$u(i) = 0, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

因此$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$，由于$\varepsilon_i \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$及$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$得

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = 0$$

因而

$$\beta_i = u(i), \quad i=1, 2, \cdots, n$$

于是任一分配均只能为$(u(1), u(2), \cdots, u(n))$。 □

定理1.41 本质对策有无穷多个分配。

证明 令

$$\beta_i = u(i) + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

因为对策是本质的，由定理1.36有$\sum_{i=1}^{n} u(i) < 0$，因此若把不等式组

$$\varepsilon_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = -\sum_{i=1}^{n} u(i)$$

中的各个ε_i看成未知量，则容易看出，该不等式组有无穷多个解，再由定理1.39知，由对应于ε_i的β_i所组成的矢量$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$是分配。由于各$\varepsilon_i$的数目是无穷的，因而分配也是无穷的。 □

需要注意的是，矢量$(u(1), u(2), \cdots, u(n))$不是

本质对策中的一个分配。因为若其是一个分配，则应该写成

$$u(i)=u(i)+\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

由此得 $\varepsilon_i=0$（$i=1,2,\cdots,n$）。从而 $\sum_{i=1}^{n} u(i)=0$，这是与对策的本质性相矛盾的。

为了表示在一个联盟 S 内，其中的局中人对于两个分配 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的好恶，我们引入下述定义。

定义 1.19 设 n 人零和有限对策 G 的特征函数为 $u(S)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 与 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 G 的两个分配。如果有一个联盟 $S\subset I$（I 表局中人组成的集合）存在，并满足下述条件：

（1）$S\neq\varnothing$；

（2）$u(S)\geqslant \sum_{i\in S} x_i$；

（3）对于 S 中的全部 i，$x_i>y_i$。

则称分配 x 关于联盟 S 优先于（简称为优于）分配 y。

在定义 1.19 中，条件 $S\neq\varnothing$ 是很自然的。因为若 S 中空无一人，则根本谈不上里面的局中人乐于接受哪种分配或讨厌哪种分配；条件（2）称为分配的有效性，集 S 称为关于分配 x 的有效集。如果有 $u(s)<\sum_{i\in S} x_i$，注意到 $u(s)$ 表示联盟 S 能够保证得到的最大收入，因此上式表示联盟 S 不能给 S 中的成员带来更多的收入（与各个成员单独参加对策的收入相比），因而联盟也就无法形成。于是，对于 S 中的成员来说，分配 x 比分配 y 的优越性也就无从谈起；条件（3）的意义也是很直观的，因为对于 S 中的每个局中人 i 均有 $x_i>y_i$，则 S 中的各个局中人自然愿意用分配 x 而拒绝 y。

分配 x 关于联盟 S 优先于分配 y，常常记成

$$x \underset{S}{\succ} y, \text{ 或 } (x_1, x_2, \cdots, x_n) \underset{S}{\succ} (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

由上述定义还可看出，在任何对策 G 中，若 $S=\{i\}$ 或 $S=I$，这种分配关于 S 的优先关系是不存在的。因为，若联盟 S 仅有一个局中人 i 时，如果对于两种分配 x 与 y 有 $x \underset{S}{\succ} y$，则由定义 1.19（2）可得

$$u(i) \geqslant x_i > y_i$$

显然，上述不等式与 y 是一种分配的定义相矛盾。因此，这种分配的优先关系不能成立。仿此还可证明当 $S=I$ 时，这种分配关于 S 的优先关系同样不能成立。这样一来，一种分配如果关于 S 优先于另一种分配，就可得知 S 至少应包含两个局中人，最多包含 $n-1$ 个局中人。

定义 1.20 在 n 人零和有限对策 G 中，如果存在一个非空联盟 $S \subset I$，使 $x \underset{S}{\succ} y$，则称在 G 中分配 x 优先于分配 y，并记作 $x \succ y$。

需要指出的是，一种分配关于某个联盟 S 优先于另一种分配的概念满足传递性（即若有 $x \underset{S}{\succ} y$，$y \underset{S}{\succ} z$，则必有 $x \underset{S}{\succ} z$），然而定义 1.20 中所述的分配的一般优先关系则不一定具有传递性。例如考虑下面的三种分配：

$$x=(0.1,\ 0.1,\ -0.2);\quad y=(0,\ 0,\ 0);$$

$$z=(-0.1,\ 0.2,\ -0.1)$$

显然有 $x \underset{\{1,2\}}{\succ} y$ 且 $y \underset{\{1,3\}}{\succ} z$，因而由定义 1.20 知有 $x \succ y$ 且 $y \succ z$，但是 $x \succ z$ 却不成立。下面的定理表明，在一个对策 G 中关于 S 的优先关系，在策略等价的意义下，相应分配的优先关系仍然是成立的。

定理 1.42 如果 $u \sim u'$，设在 G 中的分配 x 关于 S 优先于分

配 y，即有 $x \succ_S y$。在策略等价的意义下，与 x、y 相应的分配是 x' 及 y'，则

$$x' \succ_S y'$$

证明 首先需要证明 x' 与 y' 是一个分配。这点由读者自己证明。

因为 $u \sim u'$，可设

$$u'(S) = ku(S) + \sum_{i \in S} a_i, \quad k > 0, \quad S \subset I$$

$x \succ_S y$ 表明有一个联盟 $S \neq \phi$，且

$$\sum_{i \in S} x_i \leqslant u(S), \text{ 且 } i \in S \text{ 时} \quad x_i > y_i$$

在上述策略等价意义下与 $x' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ 相应的分配 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的确切含义为

$$x'_i = kx_i + a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

类似地

$$y'_i = ky_i + a_i, \quad i = 1, 2, , \cdots n$$

因此

$$\sum_{i \in S} x'_i = \sum_{i \in S} (kx_i + a_i) = k \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in S} a_i$$

$$\leqslant ku(S) + \sum_{i \in S} a_i = u'(S)$$

于是 S 对分配 x' 的有效性（即定义 1.19 中的(2)）得证。

再由 $x \succ_S y$，得

$$x'_i = kx_i + a_i > ky_i + a_i = y'_i, \quad i \in S.$$

由定义 1.19 得

$$x' \succ_S y' \qquad \square$$

定义 1.21 在一个 n 人零和有限对策 G 中，所有的不能被其它分配所优先的那些分配所组成的集，称为这个对策的核心。

定理 1.43 设对策的特征函数是 $u(S)$，一个分配 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 属于核心的充分条件是：对任一个 $S\subseteq I$

$$\sum_{i\in S} x_i \geqslant u(S) \tag{1.38}$$

证明 如果分配 x 不属于核心，则有某个联盟 S 存在，关于 S 有 y 优先于 x，即

$$y_i > x_i, \quad i\in S$$

由此

$$\sum_{i\in S} x_i < \sum_{i\in S} y_i \leqslant u(S)$$

这与（1.38）式相矛盾。 □

由定义 1.21 得知，若有两种分配供联盟 S 选择，其中一种是属于核心的分配，另一种是不属于核心的分配，则可以肯定 S 会选择属于核心的那种分配。因此，核心的构造就成了 S 中所有局中人都关心的问题。前面我们知道，一个非本质对策，由于仅有一种分配，因而不存在分配的优先问题，但是对于本质对策，则有下述结论。

定理 1.44 对于任何一个本质对策和该对策中的一种分配 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，必存在另一种分配 y，使 $y\succ x$，而且 $x\succ y$ 不成立。

证明 首先由 x 为分配的定义知有 $x_i \geqslant u(i)$，$i=1, 2, \cdots, n$。并且还可断言在此 n 个不等式中至少存在一个 i_0，使有

$$x_{i_0} > u(i_0) \tag{1.39}$$

上述结论是明显的，否则将会得出 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(u(1), u(2), \cdots, u(n))$ 是本质对策 G 中的一种分配，而此结论将与定理 1.41 所述相矛盾。由（1.39）式，必可取 $\varepsilon>0$，使有

$$x_{i_0}=u(i_0)+\varepsilon$$

现在定义一个矢量，$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，其中

$$y_{i_0}=x_{i_0}-\varepsilon=u(i_0)$$

$$y_i=x_i+\frac{\varepsilon}{n-1},\ \text{当}\ i\neq i_0\ \text{时}$$

从上述等式可以看出，当 $i=i_0$ 时，$y_{i_0}=u(i_0)$，当 $i\neq i_0$ 时，$y_i>x_i$，而且

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

因此 y 也是一种分配。下面证明 $y\succ x$ 成立。

令 $S=I\backslash i_0$，由 y_i 的上述定义知当 $i\in S=I\backslash i_0$ 时有

$$y_i=x_i+\frac{\varepsilon}{n-1}>x_i\geqslant u(i)$$

且 $S\neq\Phi$。现证 S 对于 y 的有效性，即要证

$$\sum_{i\in S}y_i\leqslant u(S)$$

因 $y_{i_0}=u(i_0)$，由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=0$，于是 $-y_{i_0}=\sum\limits_{i\neq i_0}y_i$ 而 $u(i_0)=-u(-i_0)=-u(S)$，因此

$$\sum_{i\in S}y_i=-y_{i_0}=-u(i_0)=u(S)$$

即

$$\sum_{i\in S}y_i=u(S)$$

可见，S 对于 y 是有效的，因此 $y\underset{S}{\succ}x$，也即有 $y\succ x$。

最后证明 $x\succ y$ 不成立。假如有 $x\succ y$，则应存在一个联盟 S，S 中的局中人个数至少是二个。这样在 S 中必有一个 i，$i\neq i_0$，并使 $x_i>y_i$。但是，由前述 y 的构造方法，当 $i\neq i_0$ 时有

$y_i > x_i$. 两者显然矛盾. 故证明了 $x \succ y$ 不成立。 □

由上述定理立即可得

推论 1.45 本质对策的核心是一个空集。

下面叙述 Von Neumann 关于解的定义。

定义 1.22 在 n 人零和有限对策 G 中，一个由分配组成的集 V，如果满足下面的两个条件：

（1）V 中没有一个分配 y 被 V 中的另一个分配 x 优先；

（2）不在 V 中的任意一个分配 y，一定被 V 中某个分配 x 所优先。

则称这样的一个集 V 是对策 G 的一个 Neumann-Morgenstern 解．简称 N-M 解，或 Von-Neumann 解，或解。

N-M 解的概念在 Von-Neumann 的 n 人对策理论中占有重要的地位．这一点，正如它的名称所表示的那样。在对策理论中，解的求法以及性质成了究研的主要对象。

以下我们以三人零和对策为例，来观察上述解的具体含意。

例 1.19 研究三人零和对策：如果三个局中人中的二个结成了联盟．对策规定，这个联盟应从未参加联盟的那个局中人处得到一个单位，于是联盟外的局中人就得付出一个单位。而在联盟之内的二个局中人则将平均分配这一个单位的收入。试讨论该对策的解。

解 我们只须在简化型的情况下来进行讨论．鉴于非本质情形下仅有一种分配，故下面只讨论对策是本质的情形。我们知道有 $I=\{1, 2, 3\}$，故可设

$$u(1)=u(2)=u(3)=-\gamma$$

如前所述，把 $u(i)$ 看作局中人 i 的收入．则定可通过单位的改变，使 $\gamma=1$，在这种情况下，三人零和对策的特征函数 $u(S)$ 是完全可以确定的。因为

$$u(1)=u(2)=u(3)=-1$$

$$u(\Phi)=u(I)=0$$

利用特征函数性质：$u(-S)=-u(S)$．于是又有

$$u(1,\ 2)=-u(3),\quad u(2,\ 3)=-u(1),$$
$$u(1,\ 3)=-u(2)$$

因此

$$u(1,\ 2)=u(1,\ 3)=u(2,\ 3)=1$$

上述结果可写成

$$u(S)=\begin{cases} 0, & \text{当 } S=\Phi; \\ -1, & \text{当 } S \text{ 仅由一个局中人组成}; \\ 1, & \text{当 } S \text{ 由二个局中人组成}; \\ 0, & \text{当 } S \text{ 由三个局中人组成}. \end{cases}$$

从上述三人零和对策的讨论得知，可能的联盟共有三个．在一局结束时，三个局中人相应的支付如表 1-4 所示．

表 1-4

联盟 \ 局中人	1	2	3
(1, 2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
(1, 3)	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
(2, 3)	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

容易看出．矢量$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}\right)$及$\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$是三个分配．而且它们构成 N-M 解

$$V=\left\{\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}\right),\right.$$
$$\left.\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\}$$

为了证明V是N-M解，就需验证这三个矢量之间没有优先

关系，由定义1.19，只需对由二个局中人组成的联盟进行验证即可。为了验证V外的任一个分配$x=(x_1, x_2, x_3)$必被V中的一个分配所优先，现用反证法。因$x \notin V$，假如不被V中的任一个分配优先，因此x不被$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$所优先。于是对于联盟{1，2}来说，有

$$x_1 \geqslant \frac{1}{2} \quad 或 \quad x_2 \geqslant \frac{1}{2}$$

不然的话，x将被$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$所优先。为确定起见，不妨设$x_1 \geqslant \frac{1}{2}$成立。

进行同样的讨论可知，x也不被$\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$所优先。于是有

$$x_2 \geqslant \frac{1}{2} \quad 或 \quad x_3 \geqslant \frac{1}{2}$$

可设$x_2 \geqslant \frac{1}{2}$成立。因为$x$是一个分配，由定义有$x_1+x_2+x_3=0$。由此得

$$x_1+x_2=-x_3 \leqslant -u(3)=1$$

综合上式和$x_1 \geqslant \frac{1}{2}$及$x_2 \geqslant \frac{1}{2}$，可得

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}$$

因此，$x=(x_1, x_2, x_3)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$。此式又表明$x$是$V$中的分配，显然，此结论与假设矛盾。由此得知，我们得到的集合确是一个N-M解。

习 题 一

1. 求下列各矩阵的鞍点

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. 求下述矩阵的 min max 及 max min

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 若(x_1, y_1)及(x_2, y_2)是一个实值函数 $z=f(x, y)$ 的鞍点，证明 (x_1, y_2)，(x_2, y_1) 也是。应用此结论到矩阵对策时，它的含意是什么？

4. 两个局中人各有 n 元，在他们之间有一个价值为 c（>0）的物品，每个局中人密封一个标价，例如 i 元（i 是 0 与 n 之间的整数）以争取得到该物品，谁的标价高，谁将得到该物品，并支付给对方自己所标的数目。如果两人的标价相同，就以掷镍币的办法解决。获得物品的那个人在标价外无需再多支出，所以此时每人对该物品都有$\frac{1}{2}c$ 的期望值得到。写出支付矩阵并且确定它有无鞍点。

5. 求矩阵对策的值及两个局中人的最优策略，已知支付矩阵如下：

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. 设 $m\times m$ 矩阵对策的支付矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

其中当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=1$，而 $a_{ii}=-1$，试证明每个局中人的最优混合策略为$\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{m},\ \cdots,\ \frac{1}{m}\right)$，并且证明对策值 $v=\frac{m-2}{m}$.

7. 方阵 $A=(a_{ij})$，若 $a_{ij}=-a_{ji}$（$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$），$a_{ii}=0$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$），称 A 为反对称的，证明具有反对称支付矩阵的矩阵对策的值为 0 . 如果（X^*，Y^*）是这个对策的鞍点，则（Y^*，X^*）也是鞍点.

8. 某一矩阵对策的支付矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

另一矩阵对策的支付矩阵为 $A^*=kA$，其中 $k>0$ 为常数，证明这两个对策有相同的最优策略，并且如果 v_1 与 v_2 分别是上述对策的值，则 $v_2=kv_1$.

9. 一个 $m\times m$ 矩阵，如果它的每一行与每一列都是由 1 到 m 的整数组成的，则称它为"拉丁方阵"，如

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

证明支付矩阵为 $m\times m$ 阶"拉丁方阵"的矩阵对策的值等于$\frac{m+1}{2}$.

10. 求支付矩阵如下的矩阵对策的解

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

11. 求解支付矩阵如下的矩阵对策。

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 5 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

12. 设矩阵对策的支付矩阵为

$$\begin{bmatrix} c & c & c \\ c & 3 & 4 \\ c & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

问 c 取何值可使局中人的所有最优策略所成集合 T_1, T_2 为无限集，并证明对所有 c，此对策的值均为 c。

13. 用线性规划求解支付矩阵如下的矩阵对策。

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

14 二人零和连续对策的支付函数为 $M(x, y) = xy - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$、验证此支付函数的一个鞍点为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$。

15. 确定 k 的值，使得支付函数为 $M(x, y) = 10xy - x - y - k$ 的二人零和连续对策的值为 0 .

16. 设二人零和连续对策 G 的支付函数 $M(x,y) = \frac{1}{1+\lambda(x-y)^2}$，又已

知对策值 $v=\frac{4}{4+\lambda}$，其中 $0<\lambda<\frac{4}{3}$。证明分布函数 $F^*(x)=I_{1/2}(x)$，$G^*(y)=\frac{1}{2}I_0(y)+\frac{1}{2}I_1(y)$ 是对策G的一个解。

17. 设分布函数 $F^*(x)=x$，$G^*(y)=y$ 是支付函数为 $M(x, y)$ 的二人零和连续对策的最优策略。证明，$F(x)=x^2$，$G(y)=y^2$ 是支付函数 $M'(x, y)=M(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})$ 的连续对策的最优策略。

18. 求具有可分支付函数$M(x, y)=(x-y)^2$ 的连续对策的解。

19. 二人零和连续对策的支付函数为$M(x, y)=\sin(2x+y)$，求对策的值与局中人的最优策略。

20. 试证明推论 1.30。

21. 试证明定理 1.34。

22. 试证明在 n 人零和有限对策G中，若 $S=I$，则G中分配x关于联盟 S 优先于分配 y 不可能成立。

23. 试证明在 n 人零和有限对策G中，对于一个固定的联盟 S，优先关系$\succ_S$具有传递性。

24. 已知三人零和有限对策的特征函数有 $u(1)=4$，$u(2)=0$，$u(3)=0$，$u(1, 2)=5$，$u(1, 3)=7$，$u(2, 3)=6$，$u(1, 2, 3)=10$。求该对策的核心。

第二章 排 队 论

排队论又称随机服务系统理论，它是通过对各种服务系统在排队等待现象中概率特性的研究，来解决服务系统最优设计与最优控制的一门学科．它既是运筹学的一个重要分支，同时也是应用概率极其活跃的一个分支．由于它对随机过程的发展起着不可忽视的推动作用，因此，人们将其视为随机运筹学的重要内容之一．排队论自 20 世纪初丹麦电话工程师 A.K.Erlang 的开创性论文“概率论和电话通话”发表以来已历经 80 余年，其应用领域不断扩大．目前，排队论已在计算机系统、计算机通信网络系统、电子对抗系统、交通运输系统、医疗卫生系统、矿山采掘系统、库存管理系统、军事作战系统等方面有着重要的应用，并已成为工程技术人员、管理人员在系统分析与设计中的重要数学工具之一．

§2.1 排队系统的基本概念

在人们的日常生活中，一个服务系统在工作过程中由于拥挤而产生的排队等待现象是经常发生的．例如，顾客在理发店内等待理发（见图 2-1）、汽车在加油站前等候加油（见图 2-2）、乘客在车站前等候乘车、用户在电话机前等候通话、发生故障的机器等候工人修理、进入机场上空的飞机等候降落等等．如果我们把服务系统的含义再拓广一下，则进入雷达接收机的信号等待处理、通信系统的报文在缓冲器上等候传送、多微机系统的处理机等候访问公共内存、计算机网的用户等候使用某资源、进入水库的

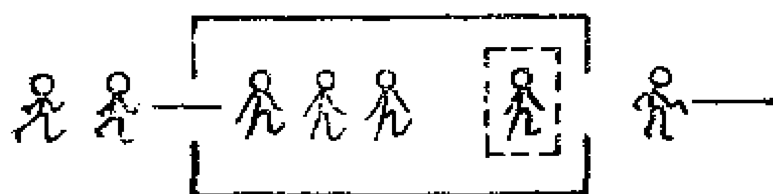


图 2-1

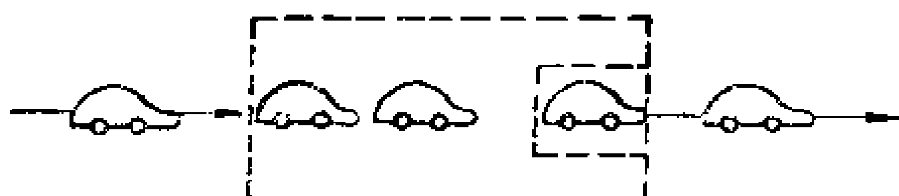


图 2-2

流水等待开闸泄放等等都可看作服务系统在运行过程中所产生的排队等待现象。我们就将这种具有排队等待现象的服务系统通称为排队系统。

任何一个服务系统总是由两个相辅相成的要素：顾客和服务员（或服务台）所构成。凡是要求接受服务的人与物统称为顾客，如要求乘车的乘客、要求通话的用户、进入机场上空要求降落的飞机、进入雷达接收机要求处理的信号等都是顾客；凡是给予顾客服务的人与物统称为服务员（或服务台），如运载乘客的公共汽车、安排通话的电话交换台，供飞机降落使用的跑道、对信号实施处理的信号处理器等都是服务员。

对于一个排队系统来说，如果顾客的到达时刻和对顾客的服务时间是固定的话，则人们总可以适当安排或调整服务员个数、服务速率，从而使顾客到达后少排队甚至不排队而迅速进入服务，亦即容易达到供求之间的平衡关系，如通常情况下的火车调度就属于以上情况。然而由于客观环境的复杂多变以及种种随机因素的影响，使得在绝大多数情况下，顾客到达服务系统的时刻以及对顾客的服务时间都是随机的，这就给服务系统造成了一系列供求之间的矛盾。例如，有时顾客到得多而服务跟不上(供不应求)，

而另一些时候则由于顾客少(或无顾客)而使服务员处于空闲状态(供过于求)。因此，排队论的主要任务就是：通过对排队系统概率规律性的探讨来寻求某些能达到供求平衡的手段与策略，这也就是排队系统的所谓最优设计与最优控制问题。

(一) 排队系统的基本构成

考虑到任何一个顾客通过排队系统总要经过如下过程：即顾客到达、排队等待、接受服务、离去。因此，排队系统的概率规律性显然与如下三个因素有关，这就是：(1) 顾客到达规律，(2) 顾客排队与接受服务的规则，(3) 服务机构的结构形式、服务员个数与服务速率。因此，人们就将上述三个因素称为排队系统的三个基本组成部分。下面将分别给予介绍。

1、输入过程

输入过程是用来刻画顾客到达规律的一种数学描述。通常可用如下的三种随机过程 $\{M(t),\ t\geqslant 0\}$，$\{s_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$，$\{\tau_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$来描述，其中$M(t)$表示在时间间隔$(0,\ t]$内到达排队系统的顾客数；$s_n$表示第$n$个到达系统的顾客的到达时刻；而$\tau_n=s_n-s_{n-1}$，$s_0=0$，它表示第$n$个顾客与其前一顾客相继到达的时间间隔。$M(t)$，$s_n$，$\tau_n$之关系见图2-3。并有

$$M(t)=\max\{n:s_n\leqslant t\},\quad s_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i$$

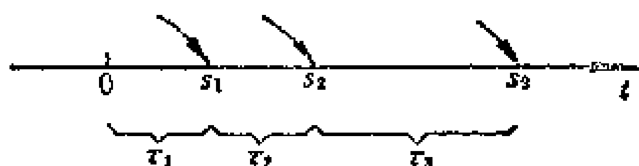


图 2-3

为了便于研究，人们根据到达过程的不同概率特性将其分成

如下几类，并给予不同的符号以示区别。

a 定长输入（D）：这种输入是指顾客规则地等间隔到达，且每隔时间 c 到达一个顾客，即有 $\tau_n = c$。显然，τ_n 的分布函数为

$$A(t) = P(\tau_n \leqslant t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geqslant c \end{cases}$$

b Poisson 流输入（M）：系统的输入过程 $\{M(t),\ t \geqslant 0\}$ 为 Poisson 流。一个取非负整数值的随机过程 $\{M(t),\ t \geqslant 0\}$ 称为 Poisson 流，是指其满足如下三条件：

(a) $P(M(0) = 0) = 1$

(b) 对于任何 $0 \leqslant s < t$，增量 $M(s, t) = M(t) - M(s)$ 有参数为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 分布。即对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 有

$$P(M(s, t) = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \tag{2.1}$$

(c) 过程 $\{M(t),\ t \geqslant 0\}$ 具有独立增量性

c k 阶 Erlang 输入（E_k）：这种输入是指顾客的到达过程 $\{\tau_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 τ_n 的分布函数为

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right),$$
$$t \geqslant 0, \quad \lambda > 0$$

或其密度函数为

$$a(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda > 0 \tag{2.2}$$

d 一般独立输入（GI）：顾客的到达过程 $\{\tau_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ 是独立同分布的非负随机变量序列，τ_n 的分布函数为 $A(t)$。上面的所有输入都可看作一般独立输入的特例。

e 成批到达输入：顾客一批接一批地相继到达系统。设 s_n 表示第 n 批顾客的到达时刻，$\tau_n = s_n - s_{n-1}$ 表示各批相继到达的

时间间隔。此时，如果每批顾客的个数L可以是常数（通常是正整数），也可是一个离散型（通常取非负整数）随机变量，而各批相继到达的时间间隔τ_n可为上述各种分布之一，则这种输入就称为成批到达输入。

2. **排队与服务规则**

排队系统内顾客的排队规则通常有等待制、损失制和混合制三种。当顾客到达时，若所有服务台均被占用，他们并不离去而是排队等待，直到接受服务为止，这种排队规则称为等待制。如通常的观众排队等待买票、乘客排队等候上车等；当顾客到达时，若所有服务台均被占用，该顾客就自动离去，且永不再来，这种排队规则称为损失制（又称消失制）。如通常使用的损失制电话系统、导弹发射系统、雷达接收系统等；当顾客到达时，若排队系统的队长小于N，顾客就排队等待以接受服务（系统内排队等待和正在接受服务的顾客总数称为系统队长）。若排队系统的队长等于N，则顾客离去且永不再来，这种排队规则称为混合制（确切地说是队长有限混合制）。混合制的排队规则除上述外，还有逗留时间有限制和等待时间有限制等，如出炉的钢水未被及时浇铸将报废、库存的药品超过有效期将被销毁等就是后二种混合制的实例。

当顾客进入排队系统后，其接受服务的规则有先来先服务、后到先服务、优先权服务和随机服务等。在具有优先权服务规则的排队系统中，进入系统的顾客均有不同的优先级，具有较高优先级的顾客可先于较低优先级的顾客得到服务，而不管他们到达的先后次序。优先级别可以有很多，但同一优先级的顾客若同时处于系统中排队等待时，则他们的服务规则又可以是先来先服务或其它服务规则。

优先权服务规则还可以分为强占型与非强占型两类。在具有强占型优先权服务规则的排队系统中，当新到的顾客其优先级高于正在接受服务的顾客优先级时，必须中断正在进行的服务，转

而去给新到的顾客实施服务。只有当该顾客服务结束而系统中又无更高优先级的顾客时，方可再次对被迫中断的顾客进行服务。在具有非强占型优先权服务规则的排队系统中，当具有较高优先级的顾客到达时，正在接受服务的顾客尽管其优先级别较低，但仍需让其服务完成以后，方能从等待顾客中选取具有较高优先级的顾客进行服务。例如某些计算机系统或通信系统就具有上述服务规则，详可见§2.4中的例题。

3．服务机构

服务机构通常包括：服务员（台）的个数、服务机构的结构形式（如串联、并联、混联或网络等结构形式）、服务过程等。

若以v_n表示到达系统的第n个顾客在系统中接受服务的时间，则$\{v_n, n=1,2,\cdots\}$称为服务过程。设v_n的分布函数为$B(t)$，服务过程可分成如下几类：

a　定常服务分布（D）：此时每个顾客的服务时间为一正常数c，即有分布函数

$$B(t)=P(v_n\leqslant t)=\begin{cases}0, & 当\ t<c\\ 1, & 当\ t\geqslant c\end{cases}$$

b　负指数服务分布(M)：此时每个顾客的服务时间v_1, v_2，$\cdots$，v_n，$\cdots$相互独立，并具有相同的负指数分布。其分布函数为

$$B(t)=P(v_n\leqslant t)=1-e^{-\mu t},\quad t\geqslant 0,\ \mu>0$$

c　k级Erlang服务分布(E_k)：此时每个顾客的服务时间v_1，v_2，$\cdots$，$v_n\cdots$相互独立，并有相同的k级Erlang分布，其分布函数为

$$B(t)=1-e^{-k\mu t}\left(1+\frac{k\mu t}{1!}+\frac{(k\mu t)^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

$$t\geqslant 0,\ \mu>0$$

其密度函数为

$$b(t)=\frac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\mu t},\quad t\geqslant 0,\ \mu>0$$

d　一般独立的服务分布（G）：此时，所有顾客的服务时

间相互独立，并有相同的分布函数$B(t)$。前面所述的各种服务分布均可看作为一般独立的服务分布的特例。

（二）排队系统的分类与符号

由于各种排队系统所处的环境及所研究的问题各不相同，因而其系统的结构、排队与服务规则等有很大的差异。人们无法也不可能将其抽象成一个统一的模式来加以研究，因此只好根据各种排队系统的特征，将其分门别类，然后一类一类地加以研究。考虑到一个排队系统通常可由如下的七个特征来决定：（1）顾客的输入过程，（2）对顾客的服务过程，（3）服务员的个数，(4)系统容量（系统内所能允许进入的最大顾客数）；（5）顾客源的个数，（6）服务规则，（7）服务机构的结构形式，于是人们就根据这些特征来划分排队模型。例如，对于具有多服务员并行服务结构的排队系统，D.G.Kendall 于 1953 年提出了如下分类符号方案，并得到了国际排队论专家的认可。该符号方案由$A/B/C/D/E/F$组成，其中A代表输入过程类别，B代表服务时间分布类别，C代表服务员的个数，D代表系统容量（当$D=C$时，该系统即为损失制，当$D=\infty$时，该系统为等待制，当$C<D<\infty$时，该系统为队长有限混合制），E代表顾客源的个数（若顾客源为无限源，则该项可省略不写），F为服务规则（当服务规则为先来先服务时可省略不写）。例如$M/M/c/k$系统，其含义为：该系统的输入过程$\{M(t),\ t\geqslant 0\}$为Poisson 流，因而顾客源的个数为∞；对每个顾客的服务时间v_1，v_2，$\cdots v_n$，$\cdots$为独立同负指数分布；c个服务员；系统容量为$k$$(k\geqslant c)$；顾客进入系统后排成一列，按照先来先服务的原则，由c个服务员并行服务。又如$GI/E_3/2/\infty$系统，其含义为：该系统的输入过程$\{\tau_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$为一般独立输入，对每个顾客的服务时间$v_1$，$v_2$，$\cdots v_n$，$\cdots$为独立同分布，其分布函数为3级 Erlang 分布；两个服务员，系统容量为∞，顾客到达后排

成一列，按照先来先服务的规则，接受两个服务员的并行服务；顾客源的个数为无限。

（三）排队系统的特性指标

由于每一个特定的排队系统本质上是一个物理系统，故排队系统的分析可采用一般物理系统（如电路系统，机械系统等）的常用分析思路，通常可分为瞬态分析与稳态分析两部分。

1. 瞬态特性指标

在每一个排队系统中，对于任一时刻 t 的队长（系统内的顾客总数）、等待队长（系统内等待接受服务的顾客数）以及每一顾客在系统中的等待时间、逗留时间（等待时间与接受服务时间的总和）和服务机构的忙期长度等，不论是顾客还是系统管理人员都是极为关心的。这犹如进入理发店的顾客首先关心的是：在理发店要等待多长时间，理发本身要耗费多长时间（逗留时间），排队等待理发的队长有多长…；而理发店的经理则关心的是：理发员的效率如何，现有理发员的个数够不够…。由于上述的系统特性指标绝大多数是随机变量或随机过程，因此人们往往关心它们的概率分布特性与期望特性。具体来说，在排队系统的瞬态分析中，人们关心的系统特性指标及其符号为：

$N(t)$： t 时刻系统的队长

$N_q(t)$： t 时刻系统的等待队长

$c(t)$： t 时刻系统忙的服务员个数

$P_j(t)=P(N(t)=j)$： t 时刻系统队长为 j 的概率

$L(t)=E[N(t)]$： t 时刻系统的平均队长

$L_q(t)=E[N_q(t)]$： t 时刻系统的平均等待队长

$\bar{c}(t)=E[c(t)]$： t 时刻系统忙的服务员平均数

$T(t)$： t 时刻到达系统的顾客在系统中的逗留时间

$T_q(t)$： t 时刻到达系统的顾客在系统中的等待时间

$V(t)$： t 时刻到达系统的顾客在系统中接受服务的时间

$W(t, x)=P(T(t)\leqslant x)$：$T(t)$ 的概率分布函数

$W_q(t, x)=P(T_q(t)\leqslant x)$：$T_q(t)$ 的概率分布函数

$W(t)=E(T(t))$：t 时刻到达系统的顾客在系统中的平均逗留时间

$W_q(t)=E(T_q(t))$：t 时刻到达系统的顾客在系统中的平均等待时间

显然有

$$N(t)=N_q(t)+c(t)$$
$$L(t)=L_q(t)+\bar{c}(t)$$
$$T(t)=T_q(t)+V(t)$$
$$W(t)=W_q(t)+E[V(t)]$$

此外，与上述特性指标有关的，还有

$M(t)$：在 $(0, t]$ 内到达系统的顾客数

$M(t, t+\Delta t)$：在 $(t, t+\Delta t]$ 时间间隔内到达系统的顾客数

$V(t, t+\Delta t)$：在 $(t, t+\Delta t]$ 时间间隔内，系统中服务结束的顾客数

s_n：第 n 个到达系统的顾客的到达时刻

$\tau_n=s_n-s_{n-1}$：相继到达的时间间隔

v_n：对第 n 个到达系统顾客的服务时间

2．稳态特性指标

一个排队系统，在其运行的初始阶段，各特性指标如 $p_j(t)$，$L(t)$，$\bar{c}(t)$，$W(t, x)$，$W_q(t, x)$，$W(t)$，$W_q(t)$ 等显然都与 t 有关，而且一般来说初始条件的影响都比较显著，这一工作阶段称为系统运行的过渡阶段（又称瞬态阶段）。但在经过足够长的运行时间后，一些系统的工作状态渐趋稳定，从而使上述各特性指标不再与时间 t 有关，而初始条件的影响也显得不那么重要了。此时，我们称该排队系统已由过渡阶段进入稳定状态阶段（或统计平衡状态阶段）。由于稳定状态分析较之瞬态分

析要容易得多，故它是本章介绍的重点。在排队系统的稳态分布中，下述指标是人们关心的（以下指标均指在系统达到统计平衡状态后的特性指标，不再一一加以注明）：

N：系统队长

N_q：系统等待队长

$P_j=P(N=j)$：系统队长为 j 的概率

$L=E(N)$：平均队长

$L_q=E(N_q)$：平均等待队长

$\bar{c}$：平均忙的服务员个数

T：到达系统的任一顾客在系统中的逗留时间

T_q：到达系统的任一顾客在系统中的等待时间

$W(x)=P(T\leqslant x)$：T 的概率分布函数

$W_q(x)=P(T_q\leqslant x)$：T_q 的概率分布函数

$W=E(T)$：T 的平均值（平均逗留时间）

$W_q=E(T_q)$：T_q 的平均值（平均等待时间）

显然有

$$L=L_q+\bar{c}$$

$$W=W_q+E(v_n)$$

除此之外，还有

$T_{忙}$：忙期长度

$P(T_{忙}\leqslant x)$：忙期长度分布

$E(T_{忙})$：平均忙期长度

$P_{失}$：顾客到达系统时由于不能进入系统而消失的概率

λ：单位时间内到达系统的平均顾客数

λ_e：单位时间内到达并进入系统的平均顾客数

当稳定状态存在时，系统的瞬态特性指标与稳态特性指标之间有关系

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t)=\lim_{t\to\infty} P(N(t)=j)=P(N=j)=P_j$$

$$\lim_{t\to\infty} L(t)=L$$

$$\lim_{t\to\infty} L_q(t)=L_q$$

$$\lim_{t\to\infty} W(t)=W$$

$$\lim_{t\to\infty} W_q(t)=W_q$$

§2.2 Poisson 排队系统(一)

一个排队系统，若其输入过程为 Poisson 流，服务时间分布为负指数分布，则称其为 Poisson 排队系统。本节主要介绍$M/M/c/\infty$与$M/M/c/k$系统的稳态分析内容，但为使读者对瞬态分析内容有所了解，故从最简单的$M/M/1/1$系统着手。

(一) $M/M/1/1$系统

根据排队模型的分类与符号规定可知，$M/M/1/1$ 系统具有下述特性：(1) 输入过程 $\{M(t),\ t\geqslant 0\}$ 为 Poisson 流，设平均到达率为 λ ($\lambda>0$)；(2)对每个顾客的服务时间 v_n 相互独立，并有相同的负指数分布，设平均服务时间为 $E(v_n)=1/\mu$，其中 $\mu>0$，它表示单位时间内服务完的平均顾客数，又称平均服务率；(3) 系统只有一个服务员；(4) 系统容量为 1，因而一个顾客若能进入系统，必可立即接受服务。而当一顾客在接受服务时，若有其他顾客到达系统，则由于系统容量的限制，这些到达顾客将由于不能进入系统而消失。除上述四个特性外，人们通常还附加下述性质：(5) 到达过程 $\{M(t),\ t\geqslant 0\}$与服务过程$\{v_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 相互独立。

1. 系统的瞬态特性

设$N(t)$表示时刻 t 时刻系统的顾客数。容易得知，$\{N(t),$

$t \geq 0\}$ 是一个只能取值 0 与 1 的随机过程，$N(t)$ 取值的全体记作 $I = \{0, 1\}$。若记转移概率

$$P(N(t+\Delta t)=j \mid N(t)=i)=P_{ij}(t, t+\Delta t)$$

则由全概率公式知

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_{00}(t, t+\Delta t) + P_1(t)P_{10}(t, t+\Delta t)$$

下面来计算转移概率 $P_{00}(t, t+\Delta t)$。

由于在 $N(t)=0$ 的条件下 $N(t+\Delta t)=0$ 这一事件可分解为下述两个互斥事件之和：

（1）在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内无顾客到达。

（2）在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内至少有 1 人到达并进入系统。与此同时，系统至少服务完一个顾客，且到达并进入系统的顾客数与被服务完的顾客数相同，从而有 $N(t+\Delta t)=0$。

显然，前者有概率

$$P(M(t, t+\Delta t)=0)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

利用前述五个系统特性，可得第二个事件之概率

$$\begin{aligned}
&P(M(t, t+\Delta t)>0,\ V(t, t+\Delta t)>0,\ N(t+\Delta t)\\
&=0 \mid N(t)=0)\\
&=P(M(t, t+\Delta t)>0 \mid N(t)\\
&=0)\cdot P(V(t, t+\Delta t)>0 \mid M(t, t+\Delta t)\\
&>0,\ N(t)=0)\cdot P(N(t+\Delta t)=0 \mid V(t, t+\Delta t)\\
&>0,\ M(t, t+\Delta t)>0,\ N(t)=0)\\
&\leq P(M(t, t+\Delta t)>0 \mid N(t)=0)\cdot P(V(t, t+\\
&\quad\Delta t)>0 \mid M(t, t+\Delta t)>0,\ N(t)=0)\\
&=(1-e^{-\lambda\Delta t})(1-e^{-\mu\Delta t})=o(\Delta t)
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
P_{00}(t, t+\Delta t)=&P(M(t, t+\Delta t)=0)\\
&+P(M(t, t+\Delta t)>0,\ V(t, t\\
&+\Delta t)>0,\ N(t+\Delta t)=0 \mid N(t))
\end{aligned}$$

$$= 0) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

对于转移概率 $P_{10}(t, t+\Delta t)$，可采用类似的方法计算。考虑到在 $N(t)=1$ 的条件下 $N(t+\Delta t)=0$ 这一事件可分解为下述两个互斥事件之和：

（3）在时间间隔 $(t, t+\Delta t]$ 内无顾客到达，但却服务完一个顾客。

（4）在时间间隔 $(t, t+\Delta t]$ 内至少有1人到达并进入系统。同时至少服务完二个顾客，且由于服务完之顾客数比进入系统之顾客数多一人，从而有 $N(t, t+\Delta t)=0$。

前者有概率

$$P(M(t, t+\Delta t)=0,\ V(t, t+\Delta t)=1)$$
$$= e^{-\lambda\Delta t}\cdot(1-e^{-\mu\Delta t}) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

后者的概率

$$P(M(t, t+\Delta t)>0,\ V(t, t+\Delta t)>1,\ N(t+\Delta t) = 0 \mid N(t)=1)$$
$$= P(V(t, t+\Delta t)>1 \mid N(t)=1)\cdot P(M(t, t+\Delta t) >0,\ N(t, t+\Delta t)=0 \mid V(t, t+\Delta t)>1, N(t)=1)$$
$$\leqslant P(V(t, t+\Delta t)>1 \mid N(t)=1) = o(\Delta t)$$

因而有

$$P_{10}(t, t+\Delta t) = P(M(t, t+\Delta t)=0,\ V(t, t+\Delta t)=1) + P(M(t, t+\Delta t)>0,\ V(t, t+\Delta t)>1,\ N(t+\Delta t) = 0 \mid N(t)=1)$$
$$= \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

上述计算过程可用表 2-1 表示。

表 2-1

情形	$N(t)$	$N(t+\Delta t)$	$M(t, t+\Delta t)$	$V(t, t+\Delta t)$	相应概率	总概率
(1)	0	0	0	—	$1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$	$P_{00}(t, t+\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$
(2)			>0	>0	$o(\Delta t)$	
(3)	1	0	0	1	$\mu\Delta t+o(\Delta t)$	$P_{10}(t, t+\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t)$
(4)			>0	>1	$o(\Delta t)$	

利用上述转移概率 $P_{00}(t, t+\Delta t)$ 与 $P_{10}(t, t+\Delta t)$ 的计算结果，可得

$$
\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= P_0(t)P_{00}(t, t+\Delta t) \\
&\quad + P_1(t)P_{10}(t, t+\Delta t) \\
&= P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t \\
&\quad + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \tag{2.3}
$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
P_1(t+\Delta t) &= P_0(t)P_{01}(t, t+\Delta t) \\
&\quad + P_1(t)P_{11}(t, t+\Delta t) \\
&= P_0(t)\lambda\Delta t+P_1(t)(1-\mu\Delta t) \\
&\quad + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

经整理得

$$
\frac{\mathrm{d}P_1(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda P_0(t)-\mu P_1(t) \tag{2.4}
$$

如果该系统初始时刻空闲，即有

$$
P(N(0)=0)=P_0(0)=1 \tag{2.5}
$$

则将 (2.3)，(2.4)，(2.5) 式联立，容易求得瞬态概率

$$P_0(t)=\frac{1}{\lambda+\mu}[\mu+\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}]$$

$$P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]$$

t 时刻系统的平均队长 $L(t)$ 有

$$L(t)=E[N(t)]=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]$$

注意到该系统的容量为 1，顾客如果能进入系统，必可立即接受服务。因此，对任何时刻 t，系统的平均等待队长 $L_q(t)=0$，而每一进入系统的顾客的平均等待时间 $W_q(t)=0$。至于 t 时刻进入系统的每一顾客，其平均逗留时间为

$$W(t)=E(v_n)=\frac{1}{\mu}$$

2. 系统的稳态特性

所谓系统的稳态特性由 § 2.1 知，是指当系统运行了足够长 $(t\to\infty)$ 时间后，进入统计平衡状态时的状态概率及系统的其他数量指标，如 L、L_q、W、W_q 等。显然有

$$P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

$$P_1=\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

$$L=\lim_{t\to\infty}L(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

$$W=\lim_{t\to\infty}W(t)=\frac{1}{\mu}$$

$$L_q=\lim_{t\to\infty}L_q(t)=0$$

$$W_q=\lim_{t\to\infty}W_q(t)=0$$

并有

$$\lambda_e = L/W = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} = \lambda P_0$$

考虑到 λ 为单位时间到达系统的平均顾客数，而 P_0 可看作此时系统空闲的概率，从而也就是该到达顾客进入系统的概率。综上所述可知，λ_e 可看作单位时间到达并进入系统的平均顾客数，通常称为有效到达率。

（二）$M/M/c/k$系统（$k\geqslant c$）

由分类符号可知，$M/M/c/k$ 系统具有下述特性：（1）输入过程$\{M(t),\ t\geqslant 0\}$为 Poisson 流，设平均到达率为 λ（$\lambda>0$）；（2）对每个顾客的服务时间 V_n 相互独立，并有相同的负指数分布，设平均服务时间为$E(v_n)=1/\mu$，其中 $\mu>0$；（3）c 个服务员并行服务，并按照先来先服务的原则提供服务；（4）系统容量为 k（$k\geqslant c$），因而该系统的等待空间为 $k-c$。当顾客到达该系统时，若该系统的队长已达到 k，则此顾客将不能进入系统而消失。故仅当该顾客到达系统而系统队长小于 k 时，该顾客方能进入系统。$M/M/c/k$ 系统的结构可用图 2-4 来描述；（5）到达过程 $\{M(t),\ t\geqslant 0\}$ 与服务过程 $\{v_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 相互独立。显然，$M/M/1/1$ 系统是$M/M/c/k$ 系统的最简单的情形。

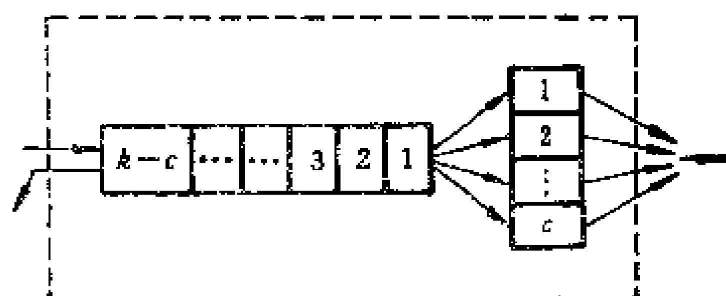


图 2-4

对于简单系统$M/M/1/1$，由于容易求得其瞬态概率$P_j(t)$，从而通过$P_j(t)$可获得其他一些瞬时数量指标$L(t)$，

$L_q(t)$，$W(t)$，$W_q(t)$，并进一步通过对上述各量取极限 $t\to\infty$ 来获得其稳态特性指标 P_j，L、L_q，W，W_q 等。然而对于一般的稍为复杂的排队系统，要想获得其瞬时状态概率并非易事，因此在解决实际问题时，如果能确知该系统统计平衡状态存在或存在的条件，则往往可直接去求解该系统在统计平衡状态下的状态概率及其他一些特性指标，而不再去求解瞬态特性。这在实际应用中往往是允许的。为求解上述系统，我们采用生灭过程法，有关生灭过程的定义及理论可见附录二。

1. 系统的统计平衡特性与队长分布

定理2.1 设 $N(t)$ 表示 t 时刻系统的顾客数，则在 $M/M/c/k$ 系统中有

（1）$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 为有限状态生灭过程，其状态空间为 $I=\{0,1,2,\cdots,k\}$，状态转移密度为

$$\lambda_n=\lambda,\quad n=0,1,2,\cdots,k-1$$

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu, & n=1,2,\cdots,c-1 \\ c\mu, & n=c,\ c+1,\cdots,k \end{cases}$$

（2）对任何 $\lambda>0$，$\mu>0$，该生灭过程 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 恒有统计平衡解，且其队长分布 $P_n=\lim\limits_{t\to\infty}P(N(t)=n)$ 有

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\sum_{n=c}^{k}\frac{\rho^n}{c!c^{n-c}}\right]^{-1}$$

$$P_n=\begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}P_0, & n=1,2,\cdots,c-1 \\ \dfrac{\rho^n}{c!c^{n-c}}P_0, & n=c,\ c+1,\cdots,k \end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $\rho=\lambda/\mu$。

证明 为验证该过程的生灭过程特性，根据附录二定义7.4之附注知，只需考察该系统在时间间隔 $(t,\ t+\Delta t]$ 内的状态转移特性即可。首先注意到该系统的容量为 k，所以任何顾客到

达系统时，若发现系统队长已达 k 时均将自动离去，因而有转移概率

$$P_{n,n+1}(t, t+\Delta t)=0 \qquad n \geqslant k$$

$$P_{n,n-1}(t, t+\Delta t)=0, \quad n=0 \text{ 或 } n>k$$

这样，在考虑转移概率 $P_{n,n+1}(t, t+\Delta t)$ 时，只需讨论 $n=0$，1，…，$k-1$ 的情形。至于转移概率 $P_{n,n-1}(t, t+\Delta t)$，则只需讨论 $n=1, 2, \cdots, k$ 的情形，而转移概率 $P_{nn}(t, t+\Delta t)$，只需讨论 $n=0, 1, 2, \cdots, k$ 的情形。以下首先来考察转移概率 $P(N(t+\Delta t)=n+1 \mid N(t)=n)=P_{n,n+1}(t, t+\Delta t)$。

在时间间隔 $(t, t+\Delta t]$ 内，系统在 $N(t)=n$ 的条件下 $N(t+\Delta t)=n+1$ 这一事件可分解为下述两个互斥事件之和：

（1）在时间间隔 $(t, t+\Delta t]$ 内有一个顾客到达并进入系统，而正在服务的 s 个顾客均未服务完。其中 s 与队长 n 的关系式为

$$s=\begin{cases} 0, & n=0 \\ n, & n=1, 2, \cdots, c-1 \\ c, & n=c, c+1, \cdots, k \end{cases} \tag{3.7}$$

（2）在时间间隔 $(t, t+\Delta t]$ 内至少来两个顾客，而正在服务的 s 个顾客中至少有一人服务结束，且到达的顾客数恰好比服务结束的顾客数多一个，从而有 $N(t+\Delta t)=n+1$。

前一事件的概率显然有

$$P(M(t, t+\Delta t)=1, V(t, t+\Delta t)=0)=$$
$$\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}(e^{-\mu\Delta t})^{s}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

后一事件的概率则有

$$P(M(t, t+\Delta t)\geqslant 2, V(t, t+\Delta t)\geqslant 1, N$$
$$(t+\Delta t)=n+1 \mid N(t)=n)\leqslant P(M(t, t$$
$$+\Delta t)\geqslant 2 \mid N(t)=n)=o(\Delta t)$$

上述分析不仅对正整数 $n\in I$ 成立，而且对 $n=0$ 时亦有类似结论。从而有

$$P_{n,n+1}(t,\ t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\quad n=0,1,2,\cdots,k-1$$

分析转移概率$P_{n,n-1}(t,\ t+\Delta t)$可知，在$N(t)=n$的条件下$N(t+\Delta t)=n-1$这一事件可分解为下述二个互斥事件之和：

（3）在时间间隔$(t,\ t+\Delta t)$内无顾客到达，同时在s个被服务的顾客中恰好服务完一个顾客（其中s与队长的关系见(2.7)式)。

（4）在时间间隔$(t,\ t+\Delta t)$内至少到达且进入系统一个顾客，同时在s个被服务的顾客中至少服务完两个顾客，并使服务完的顾客数比到达且进入系统的顾客数多一个，从而有$N(t+\Delta t)=n-1$。

前者有概率

$$P(M(t,\ t+\Delta t)=0,\ V(t,\ t+\Delta t)=1)$$

$$=e^{-\lambda\Delta t}\binom{s}{1}(1-e^{-\mu\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^{s-1}$$

$$=s\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

后者有概率

$$P(M(t,\ t+\Delta t)\geqslant 1,\ V(t,\ t+\Delta t)\geqslant 2,\ N(t+\Delta t)=n-1|N(t)=n)\leqslant P(M(t,\ t+\Delta t)\geqslant 1|N(t)=n)\cdot P(V(t,\ t+\Delta t)\geqslant 2|M(t,\ t+\Delta t)\geqslant 1,\ N(t)=n)=(1-e^{-\lambda\Delta t})\left[1-(e^{-\mu\Delta t})^{s}-\binom{s}{1}(1-e^{-\mu\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^{s}\right]=o(\Delta t)$$

从而有

$$P_{n,n-1}(t,\ t+\Delta t)=s\mu\Delta t+o(\Delta t),\quad n=1,2,\cdots,k$$

在计算转移概率$P_{nn}(t,t+\Delta t)$时，注意到在$N(t)=n$的

条件下，$N(t+\Delta t)=n$ 这一事件可分解为下述二个互斥事件之和：

（5）在时间间隔（t，$t+\Delta t$）内无顾客到达，且被服务的 s 个顾客均未服务完（当 $n=0$ 时，将不会发生顾客接受服务的问题）。

（6）在时间间隔（t，$t+\Delta t$）内至少有一人到达并进入系统，且在被服务的 s 个顾客中至少有一个结束服务，并且进入系统与结束服务的顾客数量相等，从而有 $N(t+\Delta t)=n$。

运用与前述类似的技巧，容易求得

$$\begin{aligned}P_{nn}(t,\ t+\Delta t)&=P(M(t,\ t+\Delta t)=0,\ V(t,\ t+\Delta t)=0\mid N(t)=n)+P(M(t,\ t+\Delta t)>0,\\&\quad V(t,\ t+\Delta t)>0,\ N(t+\Delta t)=n\mid N(t)=n)\\&=1-(\lambda+s\mu)\Delta t+o(\Delta t),\quad n=1,\ 2,\ \cdots,\ k\end{aligned}$$

当 $n=0$ 时有

$$P_{00}(t,\ t+\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

于是有

$$\sum_{j\in I_1}P_{nj}(t,\ t+\Delta t)=o(\Delta t)$$

其中，当 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ 时，$I_1=I-\{n-1,\ n,\ n+1\}$。当 $n=0$ 时，$I_1=I-\{0,\ 1\}$，当 $n=k$ 时，$I_1=I-\{k-1,\ k\}$。

综上可知，$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 为有限状态生灭过程，其状态空间 $I=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$，转移密度为

$$\lambda_n=\lambda,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$$

$$\mu_n=\begin{cases}n\mu & n=1,\ 2,\ \cdots,\ c-1\\ c\mu & n=c,\ c+1,\ \cdots,\ k\end{cases}$$

并有转移密度图 2-5，由附录二定理 7.9 知，有限状态生灭过程恒有统计平衡解，故根据定理 7.10 结论，将上述计算的转移密度代入下式可得

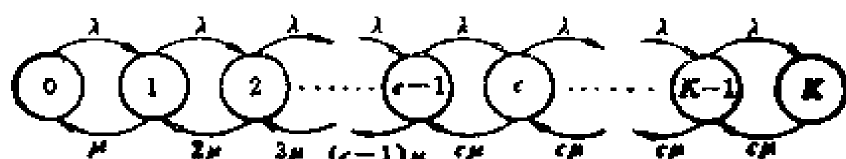


图 2-5

$$P_n=\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}P_0=\begin{cases}\dfrac{\rho^n}{n!}P_0, & n=1,2,\cdots,c-1\\[2mm] \dfrac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}P_0, & n=c,c+1,\cdots,k\end{cases}$$

$$P_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_1}}=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c-1}\dfrac{\rho^n}{n!}+\sum\limits_{n=c}^{k}\dfrac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}}$$

□

2．系统的数字特征

定理2.2 在$M/M/c/k$系统中，设$\rho=\lambda/\mu$，$\rho_c=\lambda/c\mu$，$P_c=\dfrac{\rho^c}{c!}P_0$，则该系统在统计平衡状态下有如下数字特征

$$L_q=\begin{cases}P_c\dfrac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}[1-(k-c+1)\rho_c^{k-c}+(k-c)\rho_c^{k-c+1}]\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rho_c\neq 1\\ P_c\dfrac{(k-c+1)(k-c)}{2}, \quad \rho_c=1\end{cases}$$

$$\lambda_e=\lambda(1-P_k)$$
$$\bar{c}=\rho(1-P_k)$$
$$L=L_q+\bar{c} \tag{2.8}$$
$$P_{消}=P_k$$

其中$P_{消}$为顾客到达系统时，由于不能进入系统而自动消失的概率。

证明 当系统达到统计平衡状态后，若系统队长$N\leqslant c$时，其等待队长应有$N_q=0$；仅当队长$N=c+l\ (0<l\leqslant k-c)$

时，方有等待队长$N_q=l>0$，故知等待队长N_q有分布列

$$P(N_q=0)=\sum_{j=0}^{c}P(N=j)=\sum_{j=0}^{c}P_j$$

$P(N_q=l)=P(N=c+l)=P_{c+l}$, $0<l\leqslant k-c$，从而当$\rho_c\neq 1$时有

$$L_q=\sum_{n=0}^{k-c}nP(N_q=n)=\sum_{n=0}^{k-c}nP_{c+n}=\sum_{n=0}^{k-c}n\frac{\rho^{n+c}}{c!\,c^n}P_0=$$

$$P_c\sum_{n=0}^{k-c}n\rho_c^n=P_c\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}[1-(k-c+1)\rho_c^{k-c}+(k-c)\rho_c^{k-c+1}]$$

当$\rho_c=1$时，容易推得

$$L_q=P_c\sum_{n=0}^{k-c}n\rho_c^n=P_c\frac{(k-c+1)(k-c)}{2}$$

考虑到有效到达率表示单位时间内到达并进入系统的平均顾客数，它应等于单位时间到达系统的平均顾客数λ乘以每一到达顾客能进入系统的概率$P(N<k)$，因此有

$$\lambda_e=\lambda P(N<k)=\lambda(1-P_k)$$

此外，考虑到当系统达到统计平衡状态时，单位时间进入系统的平均顾客数应与单位时间离开系统（显然是由于服务结束才离开的）的平均顾客数相等，前者为λ_e，而后者应等于$\bar{c}\cdot\mu$，故有等式

$$\lambda_e=\lambda(1-P_k)=\bar{c}\cdot\mu$$

由此可得

$$\bar{c}=\frac{\lambda_e}{\mu}=\rho(1-P_k)$$

$$L=L_q+\bar{c}$$

□

至于$P_r=P_k$则是显然的。

在$M/M/c/k$系统中，由前知当$c<k$时，该系统为混合

制排队系统，特殊地当 $c=k$ 时，该系统为损失制排队系统，容易得到损失制排队系统的如下结果。

定理2.3 在$M/M/c/c$系统中有统计平衡解

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,\ c$$

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c}\frac{\rho^n}{n!}} \tag{2.9}$$

$$P_{损}=P_c$$

$$L_q=W_q=0$$

$$\bar{c}=L=\rho(1-P_c)$$

$$W=\frac{1}{\mu}$$

3．应用

例2.1 电话站有 n 条线路，同时可供 n 对用户进行通话。设用户呼唤流为Poisson流，平均到达率 $\lambda=2$ 次/分，每个用户的通话时间服从负指数分布，平均服务率 $\mu=2$ 次/分。试求在系统达到统计平衡状态后，任一用户电话打不通的概率小于0.01时所需的最少线路数 c，以及此时对应的电话站平均占用线路数$\bar{c}$。

解 在通信理论中，当某用户要求通话时，若该电话站的 c 条线路均占线时，该用户可视作自动消失，而当其再次要求通话时，可看作另一新用户的到达。在上述意义下，用户呼唤流经统计检验，符合Poisson流的统计特性。因此，我们可将电话站视作$M/M/c/c$系统，且该系统有 $\lambda=2$ 次/分，$\mu=2$ 次/分，从而有$\rho=1$，注意到

$$P(\text{顾客打不通})=P_{拒}=P_c=\frac{\rho^c}{c!}\Big/\sum_{n=0}^{c}\frac{\rho^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{c!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{c!}\right)}$$

分别以 $c=1$、2、3，…代入上式，经计算可得表2-3。

表 2-2

c	1	2	3	4	5
P	0.5	0.2	0.0625	0.01538	0.003

由表2-3得知，当 $c=5$ 时满足条件 P(顾客打不通)$=P_5<0.01$，故应取的最少线路数为五条，此时，相应的平均占有线路数为

$$\bar{c}=\rho(1-P_c)=1-P_5=0.995$$

亦即在五条线路中，忙的平均数仅为一条。

例 2.2 某机场有两条跑道，飞机的到达与起飞过程可看作Poisson流，平均到达率 $\lambda=10$架次/天。飞机在起飞与降落时将占用跑道，并由机场的一台专用设备对其装卸货物。设飞机占用跑道的时间（主要是装卸货物的时间）服从负指数分布，平均占用率 $\mu=30$架次/天。为改进该民航系统的服务效率，管理者拟定了甲、乙两种方案，其中甲方案为增加一条跑道，但不改变 λ 与 μ；乙方案则改变跑道的平均占用率，将其由 $\mu=30$ 架次/天提高到 $\mu=40$架次/天，但不改变 λ 与跑道数。（1）若不考虑费用问题，问应取何种方案？（2）若将平均到达率增加到 $\lambda=33$ 架次/天，又应取何种方案为好？

解 如果将飞机到达机场时，由于跑道已被占用而飞往邻近机场看作自动消失，并将机场装卸设备作为服务员，跑道数 k 看作系统容量，则易知该民航系统为 $M/M/1/k$ 系统。由于不考

虑费用问题，故我们选取的目标函数是单位时间到达并进入系统的平均架次λ_e最大。利用（2.6）与（2.8）式结果并取$c=1$，可得

$$\lambda_e=\lambda(1-P_k)=\lambda\left(1-\frac{\rho^k}{1+\sum\limits_{n=1}^{k}\rho^n}\right)$$

$$=\begin{cases}\lambda\left[\dfrac{1-\rho^k}{1-\rho^{k+1}}\right], & \rho\neq 1\\[2ex] \lambda\dfrac{k}{k+1}, & \rho=1\end{cases}$$

（1）当采用甲方案与乙方案时，其对应的系统模型及有关参数计算结果见表2-4。由表可知，采用甲方案时$\lambda_e=9.75$架次/天，采用乙方案时$\lambda_e=9.5$架次/天。比较上述两种方案的λ_e，易知应取甲方案为好，即拟增添一条跑道。

表 2-3

方案	对应系统	c	k	λ	μ	ρ	λ_e（架次/天）
甲	$M/M/1/3$	1	3	10	30	$\frac{1}{3}$	9.75
乙	$M/M/1/2$	1	2	10	40	$\frac{1}{4}$	9.5

（2）将平均到达率由$\lambda=10$架次/天提高到$\lambda=30$架次/天后，若仍然不考虑费用问题，而取目标函数为λ_e最大，则分别采用甲、乙方案时的有关参数及λ_e的计算值列于表2-5。观察表2-5易知，此时应取乙方案为好，即拟采用提高跑道平均占用率到$\mu=40$架次/天的途径。

表 2-4

方案	对应系统	c	k	λ	μ	ρ	λ_e(架次/天)
甲	$M/M/1/3$	1	3	30	30	1	22.5
乙	$M/M/1/2$	1	2	30	40	$\frac{3}{4}$	22.7

（三）$M/M/c/\infty$系统（$c\geqslant1$）

根据排队模型的分类与符号规定易知，该系统有如下特性：（1）输入过程$\{M(t),\ t\geqslant0\}$为Poisson流，设平均到达率为$\lambda(\lambda>0)$。（2）对每个顾客的服务时间v_n相互独立，并有相同的负指数分布。其平均服务时间为$E(v_n)=1/\mu$，其中$\mu>0$。（3）c个服务员并行服务（$c\geqslant1$）、并遵守先来先服务的原则。（4）系统容量为∞，因而该系统的等待空间亦为∞，从而使每一到达系统的顾客总能进入系统，或接受服务，或排队等待。（5）到达过程$\{M(t),\ t\geqslant0\}$与服务过程$\{v_n,\ n=1,2,\cdots\}$相互独立。$M/M/c/\infty$系统的结构图见图2-6。

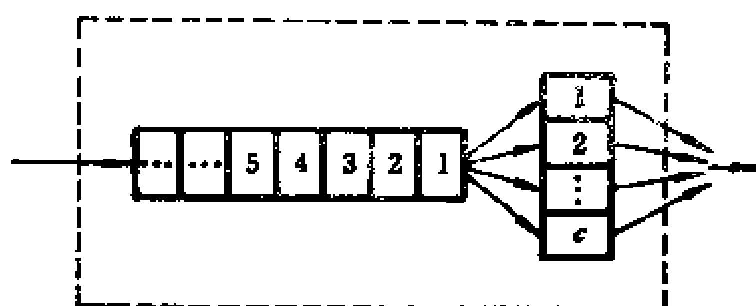


图 2-6

1. 系统的统计平衡特性与队长分布

定理2.4 设$N(t)$表示t时刻系统的顾客数，则在$M/M/c/\infty$系统中有

（1）$\{N(t),\ t\geqslant0\}$为可列状态生灭过程，状态空间I

$=\{0, 1, 2, \cdots\}$，并有转移密度

$$\lambda_n=\lambda, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

$$\mu_n=\begin{cases} 0, & n=0 \\ n\mu, & n=1, 2, \cdots, c-1 \\ c\mu, & n=c, c+1, c+2, \cdots \end{cases}$$

（2）生灭过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$有统计平衡解的充要条件为$\lambda/c\mu<1$。当该条件满足时，有队长分布

$$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)}}$$

$$P_n=\begin{cases} \frac{\rho^n}{n!}P_0, & n=1, 2, \cdots\cdots c-1 \\ \frac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}P_0, & n=c, c+1, c+2, \cdots\cdots \end{cases} \tag{2.10}$$

其中$\rho=\lambda/\mu$。

证明 （1）由附录二定义7.4知，只须在时间间隔$(t, t+\Delta t)$内来考察该过程的转移概率特性即可。运用与定理2.1类似的思路，可知有

$$\begin{aligned} P_{n,n+1}(t, t+\Delta t) &= P(N(t+\Delta t)=n+1 \mid N(t)=n)=P(M(t, t+\Delta t)=1, V(t, t+\Delta t)= \\ &\quad 0 \mid N(t)=n)+P(M(t, t+\Delta t)\geqslant 2, V(t, t+\Delta t)\geqslant 1, N(t+\Delta t)=n+1 \mid N(t)=n) \\ &=[\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}(e^{-\mu\Delta t})^s]+o(\Delta t) \\ &=\lambda\Delta t+o(\Delta t), \quad n=0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

其中

$$s=\begin{cases} 0 & n=0 \\ n, & n=1, 2, \cdots, c-1 \\ c, & n=c, c+1, \cdots \end{cases}$$

$$P_{n,n-1}(t, t+\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=n-1|N(t)=n)=P(M(t, t+\Delta t)=0, V(t, t+\Delta t)=1|N(t)=n)+P(M(t, t+\Delta t)\geqslant 1, V(t, t+\Delta t)\geqslant 2, N(t+\Delta t)=n-1|N(t)=n)$$

$$=\left[e^{-\lambda\Delta t}\binom{s}{1}(1-e^{-\mu\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^{s-1}\right]+o(\Delta t)=s\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$=\begin{cases} n\mu\Delta t+o(\Delta t), & n=1, 2, \cdots, c-1 \\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & n=c, c+1\cdots \end{cases}$$

$$P_{nn}(t, t+\Delta t)=P(M(t, t+\Delta t)=0, V(t, t+\Delta t)=0|N(t)=n)+P(M(t, t+\Delta t)\geqslant 1, V(t, t+\Delta t)\geqslant 1, N(t+\Delta t)=n|N(t)=n)$$

$$=e^{-\lambda\Delta t}e^{-s\mu\Delta t}+o(\Delta t)$$

$$=1-(\lambda+s\mu)\Delta t+o(\Delta t), \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

从而有

$$\sum_{j\in I} P_{nj}(t, t+\Delta t)=o(\Delta t)$$

其中当 $n=0$ 时，$I_1=I-\{0, 1\}$，当 $n>0$ 时有 $I_1=\{n-1, n, n+1\}$。综上可知，$\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为可列状态生灭过程，并有转移密度

$$\lambda_n=\lambda, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu, & n=1, 2, \cdots, c-1 \\ c\mu, & n=c, c+1, \cdots \end{cases}$$

$M/M/c/\infty$ 系统的转移密度图见图2-7。

（2）由附录二定理7.9知，可列状态生灭过程能达到统计平衡状态的充要条件为

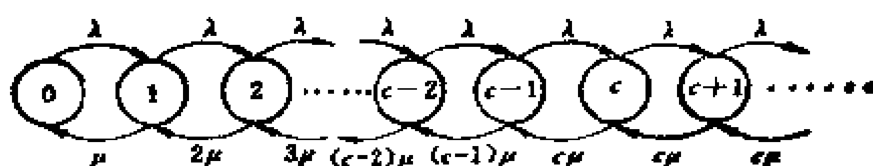


图 2-7

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n < \infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty \end{cases} \quad \text{其中} \pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}$$

考虑到条件 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n < \infty$ 等价于条件 $\sum_{n=c}^{\infty} \pi_n < \infty$，而

$$\sum_{n=c}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c!\,\mu^c (c\mu)^{n-c}} = \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c} < \infty$$

等价于 $\lambda/c\mu < 1$。至于条件 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty$ 类似可证其等价于条件 $\lambda/c\mu \leqslant 1$。综合上述条件可知：该排队系统能达到统计平衡状态的充要条件为 $\lambda/c\mu = \rho/c < 1$。当该条件满足时，根据定理7.10结论知，有队长分布

$$P_n = \pi_n P_0 = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} P_0$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0, & n = 1, 2, \cdots, c-1 \\ \dfrac{\rho^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & n = c, c+1, \cdots \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \pi_n + \sum_{n=c}^{\infty} \pi_n}$$

$$=\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)}}$$ □

2. 系统的数字特征与等待时间分布

定理2.5 在$M/M/c/\infty$系统中，设$\rho=\lambda/\mu$，$\rho_c=\lambda/c\mu$，$P_c=\frac{\rho^c}{c!}P_0$，则当$\rho_c<1$时，有

$$L_q=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}P_c \tag{2.11}$$

$$\bar{c}=\rho,\quad L=L_q+\bar{c}$$

证明 当系统达到统计平衡状态时（即当$\rho_c<1$时），考虑到仅当队长$N=n>c$时，才有等待队长$N_q=k>0$，并有分布列

N_q	0	1	2	…	k	…
$P(N_q=k)$	$\sum_{n=0}^{c}P_n$	P_{c+1}	P_{c+2}	…	P_{c+k}	…

于是，平均等待队长有

$$L_q=\sum_{k=0}^{\infty}kP(N_q=k)=\sum_{k=0}^{\infty}kP_{c+k}=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\rho^{c+k}}{c!c^k}P_0$$

$$=\frac{\rho^c}{c!}P_0\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{\rho}{c}\right)^k=P_c\sum_{k=0}^{\infty}k\rho_c^k=P_c\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}$$

显然，计算$L_q=\sum_{k=1}^{\infty}kP_{c+k}$要比直接计算$L=\sum_{n=0}^{c-1}nP_n+\sum_{n=c}^{\infty}nP_n$来得简便，因为后者计算时需要$P_n$的两个不同的分段

表示式，而前者则不需要。此外，考虑到当系统达到统计平衡状态时，单位时间进入（在本系统内即为到达）系统的平均顾客数应与单位时间离开系统（由于服务结束而离开）的平均顾客数相等，前者为λ，而后者为$\bar{c}\cdot\mu$，从而有$\lambda=\bar{c}\cdot\mu$，于是可得$\bar{c}=\rho$。至于等式$L=L_q+\bar{c}$的物理意义是明显的，因为任何时刻系统的队长总是系统内的等待队长与正在接受服务的顾客数（也就是忙的服务员个数）之和，因而其期望值当然也应相等。 □

定理2.6 当$\lambda/c\mu<1$条件满足时，$M/M/c/\infty$系统在进入统计平衡状态后，每一顾客在系统中的等待时间T_q有分布函数

$$W_q(t)=P(T_q\leqslant t)=1-\frac{P_c}{1-\rho_c}e^{-c\mu t(1-\rho_c)}\qquad t\geqslant 0$$

并有

$$E(T_q)=W_q=\frac{P_c}{c\mu(1-\rho_c)^2}\tag{2.12}$$

$$E(T)=W=W_q+\frac{1}{\mu}$$

证明 当$t=0$时，利用（2.10）式可得

$$W_q(0)=P(T_q=0)=P(N\leqslant c-1)=1-\sum_{n=c}^{\infty}\frac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}P_0$$

$$=1-P_c\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}=1-\frac{P_c}{1-\rho_c}$$

当$t>0$时，顾客的等待时间T_q与该顾客到达系统时的系统队长有关。若系统队长$N=n<c$，则$T_q=0$。若$N=n\geqslant c$，则由于服务机构采用并行服务的方式，因而该顾客必须等待服务机构完成$n-c+1$个顾客的服务后方能进入服务，于是有

$$W_q(t)=P(T_q\leqslant t)=P(T_q=0)+P(0<T_q\leqslant t)$$

$$=W_q(0)+\sum_{n=c}^{\infty}P_nP(T_q\leqslant t\,|\,N=n)$$

$$=W_q(0)+\sum_{n=c}^{\infty}P_nP(\tilde{T}_1+\tilde{T}_2+\cdots+\tilde{T}_{n-c+1}\leqslant t)$$

其中$\widetilde{T}_l$表示自新顾客到达时刻起该排队系统的第 l 个输出间隔。下面我们来研究$\widetilde{T}_l$的概率特性，由于当系统队长$N=n\geqslant c$时，所有服务台均处于连续繁忙时期，注意到每一服务台对每一顾客具有相互独立的负指数服务时间，因而每一服务台的输出流，由附录二定理7.6知可看作参数为μ的Poisson流。且由于服务时间的相互独立性，从而使该排队系统的输出流可看作为这c个相互独立且参数为μ的Poisson流的迭加，因而由定理7.8知是一个参数为$c\mu$的Poisson流。再次利用输出流是Poisson流的特性，易知输出间隔$\widetilde{T}_1$，$\widetilde{T}_2$，…，$\widetilde{T}_{n-c+1}$相互独立，并均服从参数为$c\mu$的负指数分布，从而知这$n-c+1$个输出间隔之和$\sum\limits_{l=1}^{n-c+1}\widetilde{T}_l$服从参数为$c\mu$的$n-c+1$阶Erlang分布。

于是有

$$\sum_{n=c}^{\infty}P_n\cdot P(\widetilde{T}_1+\widetilde{T}_2+\cdots+\widetilde{T}_{n-c+1}\leqslant t)$$

$$=\sum_{n=c}^{\infty}\frac{\rho^n}{c!c^{n-c}}P_c\int_0^t\frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!}e^{-c\mu x}dx$$

$$=P_c c\mu\int_0^t\sum_{n=c}^{\infty}\frac{(\mu\rho x)^{n-c}}{(n-c)!}e^{-c\mu x}dx$$

$$=P_c c\mu\int_0^t e^{-\mu x(c-\rho)}dx=\frac{P_c}{1-\rho_c}[1-e^{-\mu t(c-\rho)}]$$

从而可得当$t>0$时

$$W_q(t)=P(T_q\leqslant t)=W_q(0)+\sum_{n=c}^{\infty}P_nP(\widetilde{T}_1+\widetilde{T}_2+\cdots\cdots+\widetilde{T}_{n-c+1}\leqslant t)=1-\frac{P_c}{1-\rho_c}+\frac{P_c}{1-\rho_c}\cdot[1-e^{-\mu t(c-\rho)}]=1-\frac{P_c}{1-\rho_c}e^{-c\mu t(1-\rho_c)}$$

合并可得 $t \geqslant 0$ 时有

$$W_q(t) = 1 - \frac{P_c}{1-\rho_c} e^{-c\mu t(1-\rho_c)}$$

由上式，即可求得平均等待时间

$$W_q = \int_0^{\infty} t\mathrm{d}W_q(t) = \frac{-P_c}{(1-\rho_c)} \int_0^{\infty} t\,\mathrm{d}e^{-c\mu t(1-\rho_c)}$$

$$= \frac{P_c}{c\mu(1-\rho_c)^2}$$

由于每一个顾客的逗留时间 $T = T_q + V_n$，故其期望值有

$$W = W_q + E(V_n) = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

□

3. 应用

例2.3 某大城市的计算中心需购买计算机，有两个方案可供选择：

方案甲　购买一台大型机集中使用。

方案乙　购买 n 台小型（或微型）机分散使用（分散使用的含义可认为是将原来大型机的用户平均分给 n 台小型机。因而若设到达大型机的顾客流是平均到达率为 λ 的Poisson流，则到达每台小型机的顾客流仍可看作 Poisson 流，但平均到达率为 λ/n）。

若设大、小型机对每个用户的服务时间均服从负指数分布，但大型机平均服务率为 μ，小型机为 $\frac{\mu}{n}$，并设 $\lambda/\mu < 1$。试问在两个方案费用基本接近的情况下，应选择哪一种方案为好？

解　设大型机系统为排队系统 Ⅰ，n 台小型机构成的系统为排队系统 Ⅱ．则系统 Ⅰ 为$M/M/1/\infty$系统，平均到达率 $\lambda_1 = \lambda$，平均服务率$\mu_1 = \mu$。系统 Ⅱ 由 n 个$M/M/1/\infty$子系统构成，其中每个子系统的平均到达率$\lambda_2 = \lambda/n$，平均服务率 $\mu_2 = \mu/n$。注意到系统 Ⅰ 的利用率ρ_1与系统 Ⅱ 的利用率 ρ_2有$\rho_1 = \rho_2 = \lambda/\mu < 1$，故可利用（2.11）式与（2.12）式得表2-6。观察表 2-6 可

知，系统Ⅱ的平均等待队长，每个顾客在系统中的平均逗留时间以及平均等待时间均为系统Ⅰ的 n 倍，显然系统Ⅱ的服务效率低于系统Ⅰ的服务效率，故应采用方案甲。

表 2-5

指标		L	L_q	W	W_q
方案甲	系统Ⅰ	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{1}{\mu(1-\rho)}$	$\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
方案乙	每个子系统	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{n}{\mu(1-\rho)}$	$\frac{n\rho}{\mu(1-\rho)}$
	系统Ⅱ	$\frac{n\rho}{1-\rho}$	$\frac{n\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{n}{\mu(1-\rho)}$	$\frac{n\rho}{\mu(1-\rho)}$

例2.4 球类比赛前来到体育馆售票口买票的观众为Poisson流，平均每分钟到1人。该售票口对每个观众的售票时间服从负指数分布，每张票的平均售票时间为20秒钟。试问：（1）若有一球迷于开赛前2分钟到达售票口，并设买票后尚需1.5分钟才能找到座位，求该球迷在比赛开始前找到座位的概率。（2）若该球迷希望有99%的把握在比赛开始前找到座位，则他最迟应提前多少分钟到达售票口？

解 若将体育馆售票系统看作一排队系统，则由题意知为 $M/M/1/\infty$ 系统。且该系统的平均到达率 $\lambda=1$ 人/分，平均服务时间 $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{3}$ 分/人，即 $\rho=\frac{1}{3}$，从而知该系统能达到统计平衡状态。

（1）若设系统达到统计平衡状态后，每一球迷在售票口前的逗留时间为 T，等待时间为 T_q，注意到 $T=T_q+V_s$ 及2.12式，容易求得 T 的分布函数为 $W(t)=P(T\leqslant t)=1-e^{-\mu t(1-\rho)}$，$t\geqslant 0$。则易知球迷在比赛开始前能找到座位的充要条件为 $T\leqslant 0.5$ 分，因而有

$$P(T\leqslant 0.5)=1-e^{-1}=0.6321$$

（2） 欲使 $P(T \leqslant t)=0.99$，应有$e^{-2t}=0.01$，可解得 $t=2.3026$分，即需提前3.8026分到达。

（四） Little公式概要

观察$M/M/c/\infty$系统的（2.11）与（2.12）式容易得知，当系统达到统计平衡状态后，系统中任一时刻的平均队长L、平均等待队长L_q与每一顾客在系统中的平均逗留时间W、平均等待时间W_q有关系式

$$
\begin{aligned}
L &= \lambda_e W \\
L_q &= \lambda_e W_q
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

其中 λ_e 表示单位时间进入系统的平均顾客数。（2.13）式称为Little公式，其成立的范围远不止$M/M/c/\infty$系统（事实上在$M/M/c/k$及$M/G/1/\infty$系统中，该公式亦成立）它是由Little首先发现并给出有关假设条件及证明的。自Little的论文发表后，一些排队论学者从各种不同的角度给出了上述公式成立的条件及其证明。然而考虑到这些证明有些比较冗长复杂，有的尚有争议，为此，下面我们仅给出一个Little公式成立的直观说明。

若以$M(t)$，$Q(t)$分别表示在$(0, t]$内进入系统的顾客数与从系统中离去的顾客数，$N(t)$表示t时刻系统的顾客数，则对任一时刻t，总有$N(t)=M(t)-Q(t)$。我们用图2-8中的两条阶梯形曲线来分别表示到达过程$\{M(t), t \geqslant 0\}$与离去过程$\{Q(t), t \geqslant 0\}$的样本函数，则由图2-8可知：两条阶梯形曲线所围的阴影面积s可看作若干个小长方条面积的累加和，其中自左向右数第i个小长方条（矩形）的底恰为第i个到达系统的顾客在系统中的逗留时间T_i，而高均为1，即有$s=\sum_i (T_i \times 1)=\sum_i T_i$。于是这两条阶梯形曲线在$(0, t]$范围内所围的阴影面积就是在$(0, t]$时间区间内进入系统的各顾客

在系统中逗留时间的总和 $s_t=\sum_i T_i$。

另一方面，由积分性质知，在时间间隔（0，t］内每一时刻系统的平均顾客数L_t为

$$L_t=\frac{1}{t}\int_0^t N(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{t}\{在（0，t］范围内阶梯形曲线所围阴影面积\}$$

$$=\frac{1}{t}\sum_i T_i=\left(\frac{\sum_i T_i}{\lambda_e t}\right)\lambda_e$$

其中和号Σ仅对在（0，t］内进入系统之各顾客的逗留时间累加，λ_e表示单位时间内进入系统的平均顾客数。由于$\sum_i T_i$表示在（0，t］内进入系统各顾客在系统中的逗留时间总和，而$\lambda_e t$表示在（0，t］内进入系统的顾客数，则$\frac{\sum_i T_i}{\lambda_e t}$表示在（0，$t$］内进入系统的每一顾客在系统中的平均逗留时间$W_t$。于是上式又可改写为

$$L_t=\left(\sum_i T_i/\lambda_e t\right)\lambda_e=W_t\cdot\lambda_e$$

为了考察系统在统计平衡状态下的性质，我们对上式两端分别取极限 $t\to\infty$，并设极限 $L=\lim_{t\to\infty}L_t$，$W=\lim_{t\to\infty}W_t$在某种概率意义下存在，则可得$L=W\lambda_e$。如果将图2-8中的$Q(t)$与$N(t)$分别用$R(t)$与$N_q(t)$代替，其中$R(t)$表示在（0，t］时间间隔内离开系统等待队列去接受服务的顾客数，而$N_q(t)$表示t时刻系统中的等待顾客数，则类似可得

$$L_q=\lambda_e W_q$$

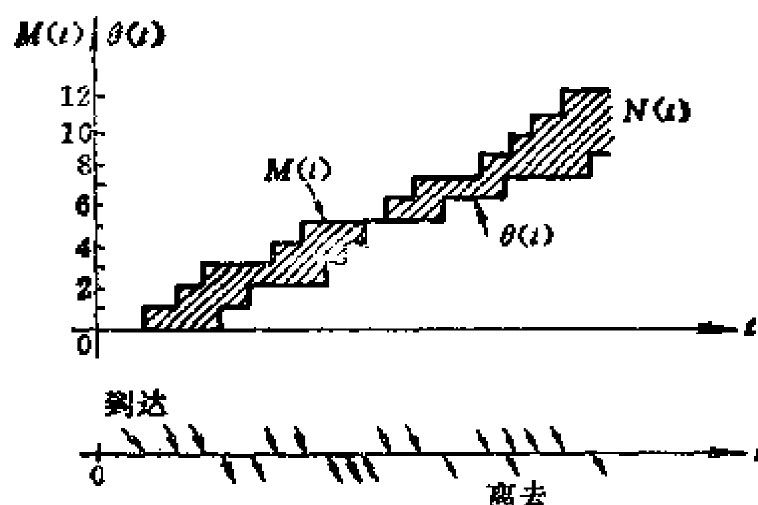


图 2-8

Little公式的重要意义在于它给出了在很多排队系统中人们所关心的四个数量指标L，L_q，W，W_q之间存在着的有机联系．注意到通常我们有关系式

$$W=W_q+E(v_n),\quad L=L_q+\bar{c}$$

综合上述两式和（2.13）两式则不难发现，只要求得$\bar{c}$（在统计平衡状态下任一时刻，系统忙的服务员平均数）和$E(v_n)$（通常v_n的概率分布是已知的），则L，L_q，W，W_q四个指标中只要任知其一，其他三个指标就立即可求得，这就大大地方便了很多排队系统的求解。

§2.3 Poisson排队系统(二)

$M/M/c/k$和$M/M/c/\infty$是Poisson排队系统中的基本模型，其基本特点除输入为Poisson流、服务为负指数分布外，其排队与服务采用串行排队，并行服务和先来先服务规则进行工作．显然，这种方式在日常生活和工作中是常见的．然而随着排队论应用范围的不断拓广，尤其是排队论在计算机系统、通信系统、交通运输系统以及军事作战系统中的广泛应用，由于这些系

统物理背景的特殊性，出现了众多与前述系统有显著不同的各种排队系统。如优先权排队系统、串并联或网络结构的排队系统、有限源排队系统、有限等待时间制排队系统及各种反馈规则的反馈排队系统等等。本节仅选择其中的部分内容来介绍它们解决问题的基本思想与方法。

从方法论的观点来看，§2.2采用的微分方程法和生灭过程法是读者所熟悉的，但为了使读者对排队论的近代分析方法有所了解，在本节系统求解中，我们将采用更为有效的马氏过程法，有关马氏过程理论的介绍见附录二。

为了求解问题的方便，下面先介绍一个有广泛应用价值的原理--概率守恒原理

（一）概率守恒原理

定理2.7 设$X_T=\{X(t), t\in T\}$为具有有限状态空间的齐次马氏过程，状态空间$I=\{0, 1, \cdots, k\}$，其转移密度矩阵为$Q=(q_{ij})_{\overline{k+1}\times\overline{k+1}}$，若$X_T$的所有状态互通，则$X_T$的平稳分布$\{P_j, j\in I\}$必存在，并满足方程组

$$\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in I}} P_i q_{ij}=\sum_{\substack{k\neq i\\ k\in I}} P_k q_{ki}, \qquad i\in I \tag{2.14}$$

证明 由附录二定理7.11及题设知，该马氏过程必存在平稳分布$P_j=\lim\limits_{t\to\infty}P(x(t)=j)$，$\sum\limits_{j\in I}P_j=1$，且平稳分布应满足

$$P_i q_i=\sum_{\substack{k\neq i\\ k\in I}} P_k q_{ki}, \qquad i\in I \tag{2.15}$$

由于X_T为有限状态的齐次马氏过程，故X_T必满足关系式$\sum\limits_{j\in I}q_{ij}=0$或

$$q_i = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} q_{ij}, \quad i \in I \tag{2.16}$$

以（2.16）代入（2.15），即可得（2.14）。 □

下面来说明（2.14）式的概率含义：注意到（2.14）左端和式内的每一项$P_i q_{ij}$均可写成

$$P_i q_{ij} = \lim_{t \to \infty} P(X(t)=i) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(t+\Delta t)=j | X(t)=i)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(t)=i, X(t+\Delta t)=j)}{\Delta t}$$

它表示在达到统计平衡状态（$t \to \infty$）后的任一时刻t，系统从状态i转移到其他状态j的转移速率。类似地（2.14）式右端和式内的每一项$P_k q_{ki}$表示在达到统计平衡状态后的任一时刻t，系统从其他状态k转移到状态i的转移速率。于是（2.14）式表述了在系统进入统计平衡状态后的任一时刻t，对于系统的每一状态i（$i \in I$）而言，有等式

系统自状态i离开的转移速率和＝系统进入状态i的转移速率和。

上述等式称为概率守恒原理。概率守恒原理与物理学中的基尔霍夫定律是极其相仿的。后者说明，当电流达到恒稳状态时，对于电路网络的每一节点i而言，在任一时刻流入节点i的电流强度（速率）和等于自i流出的电流强度和。

一个有限状态齐次马氏过程$X_T = \{X(t), \ t \in T\}$经验证得知能达到统计平衡状态时，则利用上述概率守恒原理很易求出其平稳分布$\{P_j, \ j \in I\}$，作法如下：

（1）求出X_T的转移密度矩阵$Q=(q_{ij})$，其中

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t) - P_{ij}(0)}{\Delta t}$$

在一般应用系统中，这往往是很容易得到的。然后，画出其对应的转移密度图。

（2）在转移密度图中，对于每一个选定的状态 i，观察其流入 i 与流出 i 的密度及其状态，并根据概率守恒原理，写出该状态应满足的稳态方程

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} P_i q_{ij} = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in I}} P_k q_{ki}$$

（3）依次观察状态空间 I 中的每一状态，并按照（2）的方法逐个写出其应满足的稳态方程，从而可得到方程组（2.14）。

（4）求解如下方程组，即可得平稳分布 $\{P_j,\ j \in I\}$

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} P_i q_{ij} = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in I}} P_k q_{ki}, \quad i \in I \\ \sum_{j \in I} P_j = 1 \end{cases}$$

例2.5 设齐次马氏过程 $X_T = \{X(t),\ t \in T\}$，有状态空间 $I = \{0,\ 1,\ 2\}$ 及转移密度图 2-9，试求其统计平衡解（其中 $\lambda > 0$，$\mu > 0$）。

解 由图知，$q_{01} = \lambda > 0$，$q_{10} = \mu > 0$，故状态 0 与 1 互通，类似可得 I 的所有状态互通，故 X_T 为不可约的有限状态齐次马氏过程，其平稳分布应存在。下面观察图 2-9 中的每一状态 0，1，2。依次运用概率守恒原理，可获得下列的差分方程组

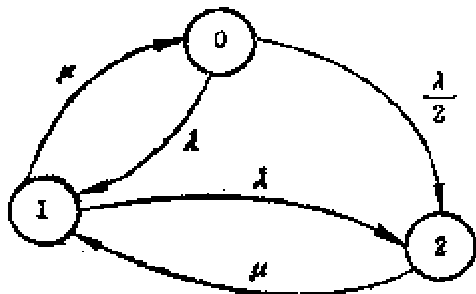


图 2-9

$$\begin{cases} \left(\lambda + \frac{\lambda}{2}\right)P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \\ \mu P_2 = \frac{\lambda}{2} P_0 + \lambda P_1 \end{cases}$$

将上述方程组与正规化条件 $\sum_{j=0}^{2} P_j = 1$ 联立，可解得

$$\begin{cases} P_1 = \frac{3\lambda}{2\mu} P_0 \\ P_2 = \left[\frac{\lambda}{2\mu} + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right] P_0 \\ P_0 = \frac{1}{1 + \frac{2\lambda}{\mu} + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \end{cases}$$

（二）具有消失制的成批到达排队系统

考虑一个$M^{(2)}/M/4/4$系统，它有如下特性：（1）顾客的相继到达时间间隔τ_1，τ_2，…，τ_n…独立同负指数分布，$E(\tau_n)=1/\lambda$，$\lambda>0$，但在每一到达时刻来的不是一个顾客，而是一批顾客（其中每批均为两个顾客）。（2）对每个顾客的服务时间v_1，v_2，…，v_n…独立同负指数分布，$E(v_n)=1/\mu$，$\mu>0$。（3）4个服务员，顾客到达后排成一列，按照先来先服务的原则并行实施服务，同批到达的顾客可任意指定先后。（4）系统容量为4，即无等待空间，因此顾客到达时，若得不到服务均将自动消失。（5）到达过程$\{\tau_n, n=1, 2, \cdots\}$与服务过程$\{v_n, n=1, 2, \cdots\}$相互独立。

上述系统是有物理背景的，例如我们考察一个由4座防空武器组成的防空系统。每座防空武器均有一定战斗性能，可以射击一定飞行高度上的空中目标，且同一时间内只能射击各自瞄准的一个目标。而敌机以机群方式实施空袭，机群到达流为 Poisson

流，空袭密度为 λ，每批机群均为两架。每座防空武器对目标的发射时间均服从负指数分布，平均发射率为 μ，且每座武器射击后能击落目标的概率为 $P(>0)$。显然，上述防空系统即为一个 $M^{[2]}/M/4/4$系统。为了衡量该系统的性能好坏，人们通常要计算该防空系统的两个效率指标：敌机的突防概率及被击落敌机的平均数。

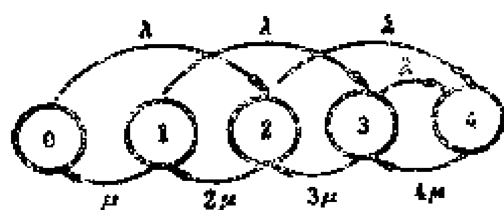


图 2-10

为解决上述问题，可设 $N(t)$表示 t 时刻系统的顾客数（t 时刻进入防区的敌机数）。易知$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$为有限状态齐次马氏过程，状态空间 $I=\{0,1,2,3,4\}$，并有转移密度图 2-10，且所有状态互通。因而这是一个不可约的有限状态齐次马氏过程，故其平稳分布恒存在，即有

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{t\to\infty} P(N(t)=j)=P_j>0, & j\in I \\
\sum\limits_{j=0}^{4} P_j=1
\end{cases}
$$

由概率守恒原理及图 2-10 可写出其稳态方程组

$$
\begin{cases}
\lambda P_0=\mu P_1 \\
(\lambda+\mu)P_1=2\mu P_2 \\
(\lambda+2\mu)P_2=\lambda P_0+3\mu P_3 \\
(\lambda+3\mu)P_3=\lambda P_1+4\mu P_4 \\
4\mu P_4=\lambda(P_2+P_3) \\
\sum\limits_{j=0}^{4} P_j=1
\end{cases}
$$

若以 $\lambda=4$ 批/分，$\mu=2$ 架/分，$P=0.8$代入上述方程组，则得

$$
\begin{cases}
P_0=\dfrac{6}{75}\\
P_1=\dfrac{4}{25}\\
P_2=\dfrac{6}{25}\\
P_3=\dfrac{4}{15}\\
P_4=\dfrac{19}{75}
\end{cases}
$$

故可得

$$P_{\text{突防}}=P_4=\frac{19}{75}\approx 0.253$$

$$\text{平均击落敌机架数}=L\times P=P\sum_{n=0}^{4}nP_n=0.8\times 2.453\approx$$

2 架

（三）具有串、并联服务结构形式的有限源优先排队系统

考虑一个具有如下服务结构形式的有限源排队系统，它具有下述特性：（1）系统内有 m 个顾客，每个顾客均有一定的优先级，其优先级为 1，2，…，m。每个顾客需循环反复地接受二级串联服务（即每一顾客在完成Ⅰ级服务后将进入Ⅱ级服务站，当完成Ⅱ级服务后又将回到Ⅰ级接受服务，如此往返循环）。（2）Ⅰ级服务站无等待空间，但有 m 个服务员并行服务，且第 i 个服务员只能对第 i 个优先级的顾客服务，其服务时间服从参数为 $\lambda_i(>0)$ 的负指数分布，$i=1,2,\cdots,m$；Ⅱ级服务站仅有一个服务员，但有 $m-1$ 个等待座位。到达Ⅱ级服务台的顾客按其优先级大小顺序排成一列，接受非强占型优先权服务，服务

时间均服从参数为$\mu(>0)$的负指数分布。上述服务的结构形式见图2-11。（3）Ⅰ级服务站对各顾客的服务时间、Ⅱ级服务站对各顾客的服务时间以及两级服务之间均相互独立。

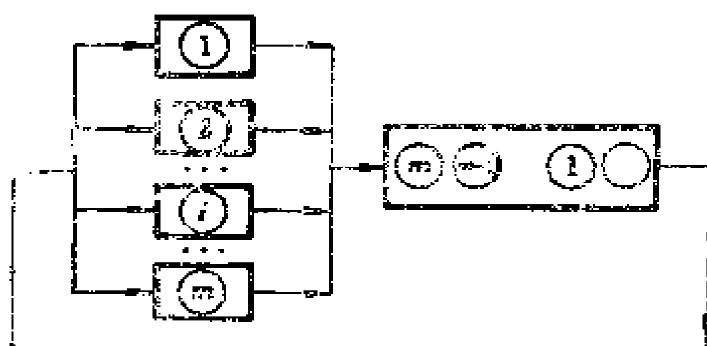


图 2-11

上述排队系统的物理背景是一个多微机处理系统。该系统由m个微处理机、一条总线及一个公共存贮器构成。第i个微处理机对其自身专用内存的处理时间服从负指数分布，平均处理时间为$1/\lambda_i$，$i=1,2,\cdots,m$。当该处理机对专用内存完成了一个负指数分布处理时间后，就需通过总线去访问公共内存。若设第i个微处理机对公共内存访问的优先级别仍为i，则当其希望访问公共内存时，若公共内存已有其他微处理机占用，该微处理机就将按照优先级别顺序排队，并接受非强占型服务。而一旦完成了对公共内存的访问后，它又将开始对自身的专用内存处理，如此往复循环……。此外一般来说各处理机对各自的专用内存处理时间、对公共内存访问时间以及两者之间均相互独立。

为了衡量上述多微处理机系统的性能优劣，人们通常要计算该系统的处理能力A，其中A表示Ⅰ级服务站的平均队长（处理专用内存的平均处理机数）。下面我们仅就$m=2$及$m=3$来分别计算该系统的处理能力A。

当$m=2$时，可设$N(t)=(i,j)$，其中i表示t时刻正在接受Ⅱ级服务的顾客序号（正在访问公共内存的微处理机序号），j表示t时刻正在Ⅱ级排队的微处理机序号。若$i=0$或

$j=0$，则分别表示Ⅱ级空或Ⅱ级无排队。容易看出$\{N(t), t\geqslant 0\}$是一个有限状态的齐次马氏过程，有状态空间$I=\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (1, 2), (2, 1)\}$。根据题意可以计算出转移密度$q_{ij}$，并得到转移密度图2-12。注意到该过程的所有状态互通，因而是不可约的有限状态齐次马氏过程，其统计平衡解必存在，即有

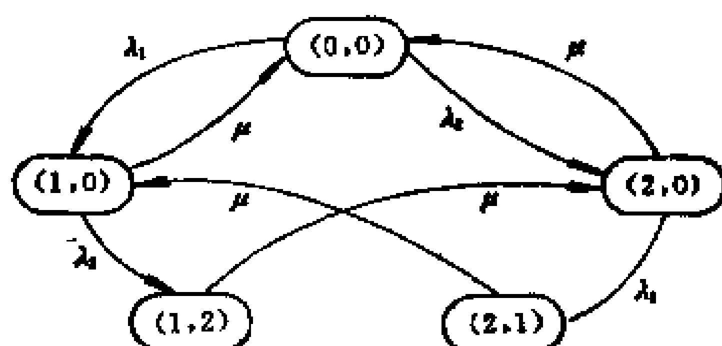


图 2-12

$$\lim_{t\to\infty} P(N(t)=(i, j))=P_{ij}, \quad (i, j)\in I$$

$$\sum_{(i, j)\in I} P_{ij}=1$$

由转移密度图2-12及概率守恒原理，容易列出下述稳态方程组，将其与正规化条件联立有

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)P_{00}=\mu P_{10}+\mu P_{20}\\ (\mu+\lambda_2)P_{10}=\lambda_1 P_{00}+\mu P_{21}\\ (\lambda_1+\mu)P_{20}=\lambda_2 P_{00}+\mu P_{12}\\ \mu P_{12}=\lambda_2 P_{10}\\ \mu P_{21}=\lambda_1 P_{20}\\ P_{00}+P_{10}+P_{20}+P_{12}+P_{21}=1\end{cases}$$

求解上述方程组，可得系统处理能力

$$A=2-[P_{10}+P_{20}+2(P_{12}+P_{21})]$$

其中方括号内的四项之和等于正在访问公共内存及排队等待的平

均处理机数。

当$m=3$时，可设$N(t)=(i, j, k)$，其中i的含义与前同，j表示t时刻按优先级别高低顺序排列时，排在等待队列首位的微处理机序号，k表示排在等待队列第二位的微处理机序号。则同理可知，$\{N(t), t\geqslant 0\}$为不可约有限状态齐次马氏过程，其状态空间$I=\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (1, 2, 0), (2, 3, 0), (1, 3, 0), (2, 1, 0), (3, 2, 0), (3, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2)\}$，其转移密度图见2-13。

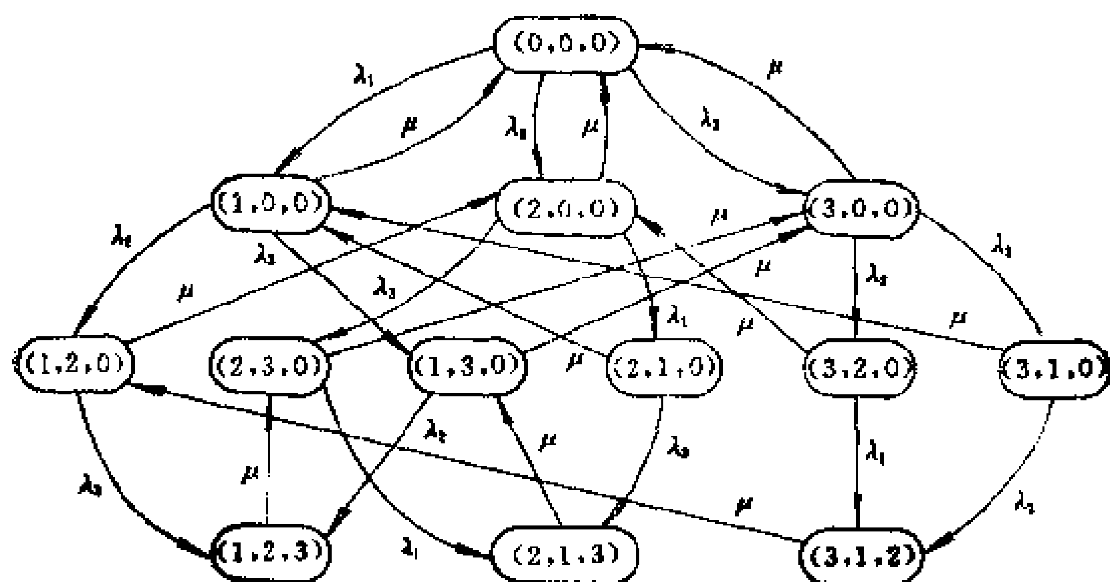


图 2-13

利用概率守恒原理及图2-13容易列出稳态概率$P_{i,j,k}$所满足的十三个方程组：

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_{000}=\mu P_{100}+\mu P_{200}+\mu P_{300}\\(\lambda_2+\lambda_3+\mu)P_{100}=\lambda_1P_{000}+\mu P_{210}+\mu P_{310}\\(\lambda_1+\lambda_3+\mu)P_{200}=\lambda_2P_{000}+\mu P_{120}+\mu P_{320}\\(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{300}=\lambda_3P_{000}+\mu P_{230}+\mu P_{130}\\(\lambda_3+\mu)P_{120}=\lambda_2P_{100}+\mu P_{312}\\(\lambda_1+\mu)P_{230}=\lambda_3P_{200}+\mu P_{123}\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
(\lambda_2+\mu)P_{130}=\lambda_3 P_{100}+\mu P_{211} \\
(\lambda_3+\mu)P_{210}=\lambda_1 P_{200} \\
(\lambda_1+\mu)P_{320}=\lambda_2 P_{300} \\
(\lambda_2+\mu)P_{310}=\lambda_1 P_{300} \\
\mu P_{123}=\lambda_3 P_{120}+\lambda_2 P_{130} \\
\mu P_{213}=\lambda_1 P_{230}+\lambda_3 P_{210} \\
\mu P_{312}=\lambda_1 P_{320}+\lambda_2 P_{310}
\end{cases}
$$

其中

$$P_{i,j,k}=\lim_{t\to\infty} P(N(t)=(i,\ j,\ k))$$

加上正规化条件后求解，即可得到系统的处理能力

$$A=3-[(P_{100}+P_{200}+P_{300})+2(P_{120}+P_{230}+P_{130}+P_{210}+P_{310}+P_{320})+3(P_{123}+P_{213}+P_{312})]$$

（四）具有有限等待时间制的排队系统

考虑一个具有限等待时间制的$M/M/c/\infty$排队系统，它具有如下特性：（1）顾客到达过程$\{M(t),\ t\geq 0\}$为Poisson流，平均到达率为λ，$\lambda>0$。（2）对每个顾客的服务时间v_1、v_2、…，v_n…为独立同负指数分布，平均服务时间$E(v_n)=1/\mu$，$\mu>0$。（3）到达顾客排成一列，按照先来先服务的原则，接受c个服务员的并行服务。（4）等待队列中的每个顾客，其最大容许等待时间z_1、z_2，…，z_n…为独立同负指数分布，$E(z_i)=1/\nu$，$\nu>0$。其中z_i表示第i个到达系统的顾客在需要排队等待时的最大容许等待时间，即当实际等待时间达到z_i时，该顾客将自动离去，永不再来。（5）系统容量为∞。（6）到达过程$\{M(t),\ t\geq 0\}$，服务过程$\{v_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$与最大允许等待过程$\{z_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$相互独立。上述系统的结构见图2-14。

上述系统的物理背景是一个由c部相互独立的侦察接收机构

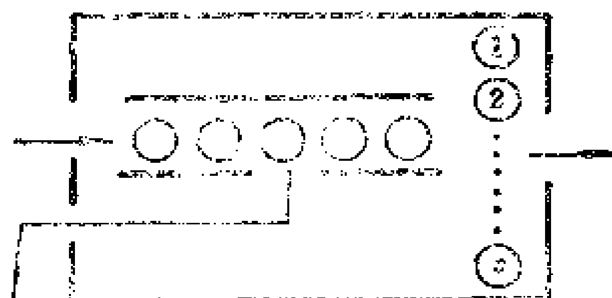


图 2-14

成的侦察系统，其主要任务是截获与分析敌方雷达信号。通常作战时，敌方雷达信号的到达流（顾客到达流）可理想地认为是Poisson流，平均到达率为 $\lambda>0$。而各侦察接收机对到达雷达信号的处理（服务）时间 $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$ 为独立同负指数分布，平均服务率为 $\mu>0$。此外被侦察的敌雷达信号的连续工作时间 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 为独立同负指数分布，$E(z_i)=1/\nu$，$\nu>0$，当每一个雷达信号连续工作结束时仍未被侦察接收机处理（未得到服务），则该雷达信号（顾客）将消失。

为了衡量上述系统的性能优劣，人们通常要求解系统的损失概率与系统容量（单位时间内被服务信号的平均数）。为此，可设 $N(t)=i$ 表示 t 时刻系统有 i 个服务台（侦察接收机）正在进行服务，还有 $c-i$ 个服务台处于空闲状态。而 $N(t)=c+k$，$k=1, 2, \cdots$ 则表示除所有 c 个服务台均在工作外还有 k 个信号（顾客）处于等待服务的状态。若规定 $N(0)=0$，则易证 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为具有可列状态的生灭过程，$I=\{0, 1, 2, \cdots\}$，并有状态转移图 2-15。

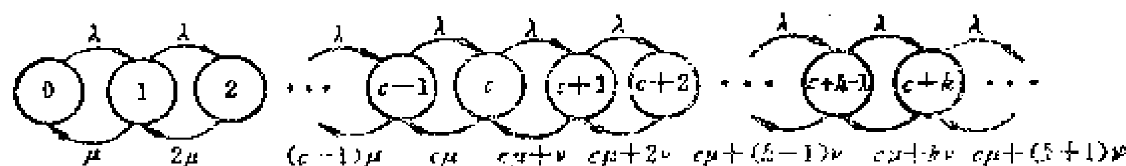


图 2-15

容易判断对任何 $\lambda>0$，$\mu>0$，$\nu>0$ 满足条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty$$

其中$\pi_0 = 1$，

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n, & n = 1, 2, \cdots, c \\ \dfrac{\lambda^n}{c!\ \mu^c \prod\limits_{j=1}^{n-c} (c\mu + j\nu)}, & n = c+1, c+2, \cdots \end{cases}$$

因而该生灭过程统计平衡解存在，并容易求得其稳态概率为

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \quad n = 1, 2, \cdots, c \\ P_{c+k} = \dfrac{\lambda^{c+k}}{c!\ \mu^c \prod\limits_{j=1}^{k} (c\mu + j\nu)} P_0, \quad k = 1, 2, \cdots \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{c+k}}{c!\ \mu^c \prod\limits_{j=1}^{k} (c\mu + j\nu)}} \end{cases}$$

若设$\dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$，$\dfrac{\nu}{\mu} = \beta$，$\dfrac{\rho^c}{c!} P_0 = P_c$，则有

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} P_0, \quad n = 1, 2, \cdots, c \\ P_{c+k} = P_c \dfrac{\rho^k}{\prod\limits_{j=1}^{k} (c + j\beta)}, \quad k = 1, 2, \cdots \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^c}{c!} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\rho^k}{\prod\limits_{j=1}^{k} (c + j\beta)}} \end{cases}$$

考虑到在统计平衡状态下，任一时刻系统的平均等待队长为

$$L_q=\sum_{k=1}^{\infty} kP_{c+k}=\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\rho^c}{c!}P_0\frac{\rho^k}{\prod_{j=1}^{k}(c+j\beta)}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} kP_c\frac{\rho^k}{\prod_{j=1}^{k}(c+j\beta)}$$

其中

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{c}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{\prod_{j=1}^{k}(c+j\beta)}\right]^{-1}$$

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu},\quad \beta=\frac{\nu}{\mu}$$

平均忙的服务员个数为

$$\bar{c}=\sum_{n=1}^{c-1} nP_n+c\sum_{n=c}^{\infty} P_n$$

系统的遗漏概率$P_{漏}$定义为

$$P_{漏}=\frac{\text{单位时间内离开等待队列而消失的平均信号数}}{\text{单位时间内进入系统的平均信号数}}$$

$$=\frac{\lambda-\bar{c}\mu}{\lambda}$$

系统的容量q定义为单位时间被服务信号的平均数

$$q=\lambda(1-P_{漏})=\bar{c}\mu$$

（五）服务速率依赖于队长的排队系统

考虑一个服务速率依赖于队长的排队系统，它具有如下系统特性：（1）顾客的到达流$\{M(t),\ t\geqslant 0\}$为Poisson流，平均到达率$\lambda>0$。（2）对每个顾客的服务时间相互独立，且均服

从负指数分布，但其服务速率依赖于队长。当队长小于M时，其服务速率为μ_1，当队长达到或超过M时，则采用服务速率μ_2，其中M为定数，$\mu_2>\mu_1>0$。（3）系统有一个服务员，到达顾客排成一列按照先来先服务的原则接受服务。（4）系统容量为∞。（5）到达过程与服务过程相互独立。

上述系统的物理背景是一个自动加工机的控制优化问题。设该自动加工机的产品到达为Poisson流，平均到达率为λ，而机器对产品的加工时间相互独立，并服从负指数分布。为了提高生产效率，工程技术人员将产品加工速率分成二档：当队长小于控制量M时，采用慢加工速率μ_1，当队长达到或超过控制量M时，采用快加工速率$\mu_2(\mu_2>\mu_1>0)$。对于上述系统，人们关心的是如何确定控制量M，以使系统在单位时间内所耗费的期望服务总费用达到最小。

为解决上述问题，首先设系统的服务费用分为两部分：（1）加工费用与平均加工速率μ成正比，单位时间内采用单位加工速率的加工费为a；（2）产品逗留损失费与平均队长L成正比，每个产品在系统内逗留单位时间的损失费为b。因而单位时间内系统所耗费的期望服务总费用为

$$G(M)=a\mu(M)+bL(M)$$

为求出使$G(M)$达到最小的M，关键在于计算$\mu(M)$与$L(M)$。为此，可设$N(t)$表示t时刻该系统的顾客数（等待加工与正在加工的产品数），则容易验证过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$为可列状态生灭过程，有$I=\{0,1,2,\cdots\}$，及转移密度

$$\begin{cases}\lambda_n=\lambda,\quad n=0,1,2,\cdots\\ \mu_n=\begin{cases}\mu_1, & n=1,2,\cdots,M-1\\ \mu_2, & n=M,M+1,M+2,\cdots\end{cases}\end{cases}$$

容易看出只需$\rho_2=\lambda/\mu_2<1$，该生灭过程有统计平衡解

$$P_n=\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}=\begin{cases}\rho_1^n P_0, & n=1,2,\cdots,M-1\\ \rho_1^{M-1}\rho_2^{n-M+1}P_0, & n=M,M+1,\cdots\end{cases}$$

其中$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}$，$\rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}$。

$$P_0=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}\right]^{-1}=\left[\frac{1-\rho_1^M}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2\rho_1^{M-1}}{1-\rho_2}\right]^{-1} \tag{2.17}$$

由此可得平均队长为

$$L(M)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=P_0\left[\sum_{n=0}^{M-1}n\rho_1^n+\sum_{n=M}^{\infty}n\rho_1^{M-1}\rho_2^{n-M+1}\right]$$

$$=P_0\left[\rho_1\frac{d}{d\rho_1}\left(\sum_{n=0}^{M-1}\rho_1^n\right)+\rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{M-2}\frac{d}{d\rho_2}\sum_{n=M}^{\infty}(\rho_2^n)\right]$$

$$=P_0\left\{\frac{\rho_1[1+(M-1)\rho_1^M-M\rho_1^{M-1}]}{(1-\rho_1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\rho_2\rho_1^{M-1}[M+(1-M)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\right\}$$

至于平均服务率，则有

$$\mu(M)=\sum_{n=1}^{2}\mu_nP(\mu=\mu_n)=\mu_1\sum_{n=0}^{M-1}P_n+\mu_2\sum_{n=M}^{\infty}P_n$$

$$=\left[\mu_1\sum_{n=0}^{M-1}\rho_1^n+\mu_2\sum_{n=M}^{\infty}\rho_1^{M-1}\rho_2^{n-M+1}\right]P_0$$

$$=\left[\mu_1\frac{1-\rho_1^M}{1-\rho_1}+\mu_2\rho_1^{M-1}\frac{\rho_2}{1-\rho_2}\right]P_0$$

其中P_0由（2.17）式确定。

将上述计算的$L(M)$与$\mu(M)$代入$G(M)=a\mu(M)+bL(M)$，即可得$G(M)$关于控制量M的具体函数表达式。在此函数表达式中，由于λ，μ_1，μ_2均为已知，故只需将控制变量M作为未知量，利用最优化问题的数值法来确定最优值M^*即可。

（六）* 排队系统的忙期长度及其分布

从顾客到达空闲服务机构起，直到服务员再度变为空闲时为止，这一段系统连续忙的时间称为系统忙期。忙期长度是衡量服务系统的效率指标之一，因此求解各种不同排队系统忙期长度的概率特性是排队论的研究内容之一。为简单起见，以下仅介绍 $M/M/1/\infty$系统的忙期长度分布及其期望值的求解方法。

若仍以$N(t)$表示系统队长，则忙期就是从$N(t)$第一次由状态 0 转移到状态 1 的时刻开始，并持续到$N(t)$第一次又返回到状态 0 时结束，图 2-16(a)描述了忙期长度d_l（d_l表示第 l 个忙期长度）的样本特性。对于$M/M/1/\infty$系统的队长变化过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$，由定理 2．4已知为一生灭过程，考虑到直接寻求忙期长度d与过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$的数量关系比较困难，为此我们在原过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$基础上构造一个与d有明显关系的新过程$\{\tilde{N}(t), t\geqslant 0\}$，使其基本保持原过程的概率特性，而区别仅在于新过程的状态 0 是吸收态。也就是说只要过程一旦转移到状态 0 后，整个过程将永远滞留在 0 状态，而不再发生转移。原过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$与新过程$\{\tilde{N}(t), t\geqslant 0\}$的样本特性见图 2-16（$a$）与图 2-16（$b$）。新过程$\{\tilde{N}(t), t\geqslant 0\}$的转移密度图见图 2-17。注意到$M/M/1/\infty$系统有Poisson到达过程与负指数分布服务的特性，显见忙期长度与时间起点无关。因此，用$\{\tilde{N}(t), t\geqslant 0\}$来描述系统忙期时，可以将时间起点移到忙期的开端。也就是说令$\tilde{N}(0)=1$．此时，$t=0$忙期开始并一直持续到$\tilde{N}(t)$再次返回到 0 时结束。观察图 2-16（c）可知，忙期长度d与$\tilde{N}(t)$有数量关系

$$P(d\leqslant t)=P(\tilde{N}(t)=0)$$

若记$P(\tilde{N}(t)=n)=q_n(t)$，则有

$$P(d\leqslant t)=q_0(t)$$

因此，为求忙期长度分布，只需求$q_0(t)$即可。

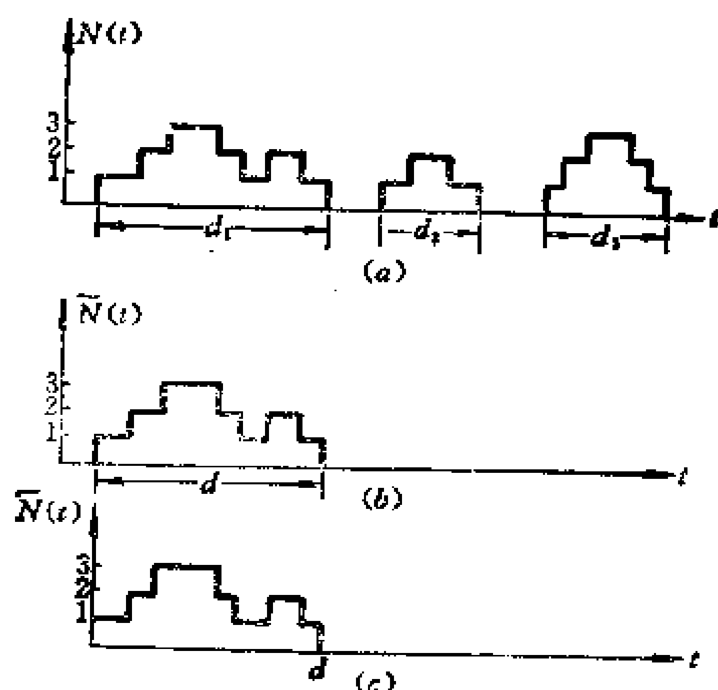


图 2-16

根据上述分析思路来进行求解，可以得到忙期长度及其分布的结论如下。

定理 2.8 在$M/M/1/\infty$系统中，设忙期长度d的分布函数为$q_0(t)$，其密度函数为$q_0'(t)$，则有

$$(1)\ q_0'(t)=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\cdot\frac{1}{t}e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2t\sqrt{\lambda\mu})$$

其中$I_m(z)$，$z\geqslant 0$为第一类修正Bessel函数，它由下列展开式来定义：

$$I_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k}.$$

（2）$q_0(t)$有下述极限等式

$$\lim_{t\to\infty}q_0(t)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1\\ \dfrac{1}{\rho}, & \rho>1\end{cases}$$

故知仅当$\rho\leqslant 1$时$q_0(t)$才构成概率分布。

（3）平均忙期长度为

$$E(d)=\frac{1}{\mu(1-\rho)}=W$$

一个忙期内服务完的平均顾客数为$\frac{1}{1-\rho}$。

证明 首先在原过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$的基础上构造新过程$\{\tilde{N}(t),\ t\geqslant 0\}$，使其保持原过程的概率特性，而与原过程唯一的区别仅在于新过程的0状态为吸收态。显然，由上述分析可知有

$$P(d\leqslant t)=P(\tilde{N}(t)=0)=q_0(t)$$

根据上述构造方法，易知新过程有转移密度图2-17。根据转移密度图2-17，易知过程$\{\tilde{N}(t),\ t\geqslant 0\}$有转移强度（密度）矩阵。



图 2-17

$$Q=(q_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

利用Колмогоров-Feller微分方程（以下简称K-F方程）有

$$\frac{dq_n(t)}{dt}=\sum_{i\in I}q_i(t)q_{in},\quad n\in I$$

具体写出可得

$$\begin{cases} q_0'(t)=\mu q_1(t) \\ q_1'(t)=-(\lambda+\mu)q_1(t)+\mu q_2(t) \\ q_n'(t)=-(\lambda+\mu)q_n(t)+\lambda q_{n-1}(t)+\mu q_{n+1}(t), \quad n\geqslant 2 \\ q_n(0)=\delta_{n1} \end{cases} \tag{2.18}$$

其中最后一个等式为初始条件，它由$P(\tilde{N}(0)=1)=1$得到。

为了求解$q_0(t)$或其Laplace变换$L[q_0(t)]$，引进$q_n(t)$的母函数$\theta(z,\ t)$，记

$$\theta(z,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t)z^n,\ |z|<1$$

由(2.18)式经适当处理可得

$$z\frac{\partial\theta(z,\ t)}{\partial t}=(1-z)(\mu-\lambda z)[\theta(z,\ t)-q_0(t)]$$

等式两边分别取Laplace变换

$$\theta^*(z,\ s)\equiv\int_0^{\infty}\theta(z,\ t)e^{-st}\mathrm{d}t,\ \mathrm{Re}(s)>0$$

$$q_0^*(s)=\int_0^{\infty}q_0(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\ \mathrm{Re}(s)>0$$

并注意到初始条件$q_n(0)=\delta_{n1}$，可得

$$z[s\theta^*(z,s)-z]=[(1-z)(\mu-\lambda z)][\theta^*(z,s)-q_0^*(s)]$$

经整理有

$$\theta^*(z,\ s)=\frac{z^2-(1-z)(\mu-\lambda z)q_0^*(s)}{(s+\lambda+\mu)z-\lambda z^2-\mu} \tag{2.19}$$

$$|z|<1,\ \mathrm{Re}(s)>0$$

为从上式中确定$q_0^*(s)$，首先来考察上式右端分母的零点个数。

若取

$$f(z)=(s+\lambda+\mu)z,\quad g(z)=-\lambda z^2-\mu$$

易知$f(z)$，$g(z)$在区域$|z|<1$解析，且在$|z|=1$上，当$\mathrm{Re}(s)>0$时有

$$|g(z)|=|-\lambda z^2-\mu|\leqslant\lambda+\mu<|(\lambda+\mu+s)z|=|f(z)|$$

因而由Rouche定理知，$f(z)+g(z)$与$f(z)$在$|z|<1$内有相同的零点个数，而$f(z)$在$|z|<1$内显然只有一个零点，故知（2.19）式右端分母在区域$|z|<1$内仅有一个零点。并容易从（2.19）式分母中的二个零点

$$\alpha_{1,2}=\frac{\lambda+\mu+s\pm\sqrt{(\lambda+\mu+s)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

中判断出在区域$|z|<1$内的零点为

$$\alpha_2=\frac{\lambda+\mu+s-\sqrt{(\lambda+\mu+s)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

以下根据零点的性质从(2.19)式来确定$q_0^*(s)$，注意到由(2.19)式所确定的$\theta^*(z, s)$在$|z|<1$收敛，故知$z=\alpha_2$作为分母在区域$|z|<1$内的零点亦必须为分子的零点，亦即有

$$\begin{cases}\alpha_2^2-(1-\alpha_2)(\mu-\lambda\alpha_2)q_0^*(s)=0\\(s+\lambda+\mu)\alpha_2-\lambda\alpha_2^2-\mu=0\end{cases}$$

综合上述二式有

$$q_0^*(s)=\frac{\alpha_2^2}{(1-\alpha_2)(\mu-\lambda\alpha_2)}=\frac{\alpha_2^2}{s\alpha_2}=\frac{\alpha_2}{s}$$

于是有

$$\frac{\alpha_2}{s}=q_0^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}q_0(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty-\frac{1}{s}q_0(t)\mathrm{d}e^{-st}$$

$$=-\frac{1}{s}q_0(t)e^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty q_0'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^\infty q_0'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

比较上式两端，则有

$$\alpha_2=\int_0^\infty q_0'(t)e^{-st}\mathrm{d}t=L[q_0'(t)] \tag{2.20}$$

对上式两端作L反演有

$$q_0'(t)=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\frac{1}{t}e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2t\sqrt{\lambda\mu})$$

（2）利用L变换的终值定理知有

$$\lim_{t\to\infty}q_0(t)=\lim_{s\to 0}sq_0^*(s)=\lim_{s\to 0}a_2$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\lambda+\mu+s-\sqrt{(\lambda+\mu+s)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

$$=\frac{\lambda+\mu-|\lambda-\mu|}{2\lambda}=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1\\ \frac{1}{\rho}, & \rho>1\end{cases}$$

（3）由（2.20）式知有

$$\left.\frac{\mathrm{d}a_2(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=-\int_0^\infty tq_0'(t)\mathrm{d}t=-E(d)$$

故有

$$E(d)=-\left.\frac{\mathrm{d}a_2(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}=W$$

至于一个忙期内服务完的平均顾客数应有

$$\frac{E(d)}{E(V)}=\frac{\frac{1}{\mu-\lambda}}{\frac{1}{\mu}}=\frac{\mu}{\mu-\lambda}=\frac{1}{1-\rho}$$ □

§2.4* 一般输入或一般服务的排队系统

一个排队系统，若其到达过程非Poisson流，或其服务时间不服从负指数分布律，或两者兼有，则称其为非Poisson排队系统。其系统特性与Poisson排队系统有着本质的差别。这是因

为对于Poisson排队系统来说，由于其到达过程及服务分布的"无记忆性"，因而从任一时刻s开始，我们来考察队长过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$的概率特性时，对于正在接受服务顾客的已服务过的时间，以及正在到达顾客的已经历过的时间可以不予考虑，从而使过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$具有马氏性．因而可直接运用马氏过程的有关理论与方法来研究系统的概率特性。然而对于一般的非Poisson排队系统来说，就不再具有这种良好的性质，此时只有引进新的分析工具来解决问题，如目前见到的Kendall引入的嵌入马氏链法，Takacs采用的积分、微分方程法以及补充变量法、组合方法等。由于篇幅的限制，本节仅介绍以$M/G/1/\infty$系统为代表的嵌入马氏链法。需要进一步了解的读者可参阅文献〔1〕，〔2〕，〔15〕，〔16〕，〔17〕，〔18〕等。

（一）$M/G/1/\infty$系统

$M/G/1/\infty$系统具有下述特性：（1）输入过程$\{M(t),\ t\geqslant 0\}$为Poisson流，平均到达率为$\lambda(\lambda>0)$．（2）对每个顾客的服务时间v_n相互独立，且有相同的分布函数$B(t)=P(v_n\leqslant t)$，$n=1,2,\cdots$，并设v_n满足条件$0<E(v_n)=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}B(t)<\infty$，$E(v_n^2)=\int_0^{\infty}t^2\mathrm{d}B(t)<\infty$。（3）系统有一个服务员．遵循顾客先来先服务原则．（4）系统容量为∞。（5）到达过程$\{M(t),\ t\geqslant 0\}$与服务过程$\{v_n,\ n=1,2,\cdots\}$相互独立。

1. 嵌入马氏链

若以N_n表示第n个被服务顾客在服务完毕离开系统瞬间所观察到的系统队长（不包括第n个被服务顾客），A_n表示在第n个被服务顾客服务期间到达系统的顾客数，则对$n\geqslant 1$有

$$N_{n+1}=\begin{cases}N_n-1+A_{n+1}, & N_n\geqslant 1\\ A_{n+1}, & N_n=0\end{cases}\tag{2.21}$$

随机变量序列$\{N_n, n=1, 2, \cdots\}$称为随机过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$的嵌入链。Kendall首先证明了$\{N_n, n=1, 2, \cdots\}$具有马氏性（因而称为嵌入马氏链），然后利用马氏链的理论得到了$\{N_n, n=1, 2, \cdots\}$的遍历性条件及其极限概率分布$\{\pi_n, n=1, 2, \cdots\}$，最后证明在满足遍历性条件时，该极限概率分布恰好就是原过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$当$t\to\infty$时的平稳分布，即$\lim\limits_{t\to\infty} P(N(t)=n)=\pi_n$，$=0, 1, 2, \cdots$，从而解决了$M/G/1/\infty$的求解问题。下面我们首先来研究$\{N_n, n=1, 2, \cdots\}$的马氏性，为此需要两个引理。

引理2.9 设$P=(P_{ij})$为不可约非周期齐次马氏链的一步转移阵，并有状态空间$I=\{0, 1, 2, \cdots\}$，若不等式组

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}X_j \leqslant X_i - 1, \quad i\geqslant 1$$

存在一个满足条件$\sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{0j}X_j<\infty$的非负解，则该马氏链为遍历。

证明可参阅文献[15]。

引理2.10 若A_n表示第n个被服务顾客在服务期间到达系统的顾客数，则$A_1, A_2, \cdots$相互独立，并有如下的相同分布列

$$0<a_k=P(A_n=k)=\int_{0^-}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t), \quad \begin{matrix} n=1, 2, \cdots \\ k=0, 1, 2, \cdots \end{matrix} \tag{2.22}$$

同时还有

$$E(A_n)=\sum_{k=0}^{\infty} ka_k=\rho$$

$$E(A_n^2)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2a_k=\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2+\rho \tag{2.23}$$

其中$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$，$\frac{1}{\mu}=E(v_n)$，$\sigma_v^2=E(v_n^2)-[E(v_n)]^2$。

证明 由于顾客到达过程为Poisson流，且它与服务过程$\{v_n, n=1, 2\cdots\}$相互独立，因而有

$$a_k=P(A_n=k)=\int_{0^-}^{\infty}P(A_n=k|v_n=t)\mathrm{d}B(t)$$

$$=\int_{0^-}^{\infty}P(M(t)=k)\,\mathrm{d}B(t)=\int_{0^-}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t)$$

$$>0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

注意到上式与n无关，因而A_1，A_2，…为同分布。关于A_1，A_2，…的相互独立性，可先任取两个A_n与A_m，证明其相互独立，然后再利用归纳法类似证明。对于任给的正整数i，j，有

$$P(A_m=i,\ A_n=j)=\int_{0^-}^{\infty}\int_{0}^{\infty}P(A_m=i,\ A_n=j|v_m$$

$$=t,\ v_n=s)\mathrm{d}B(t)\mathrm{d}B(s)$$

$$=\int_{0^-}^{\infty}\int_{0}^{\infty}P(A_m=i|v_m=t,\ v_n=s)P(A_n$$

$$=j|v_m=t,\ v_n=s,\ A_m=i)\mathrm{d}B(s)\mathrm{d}B(t)$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t)\int_{0^-}^{\infty}\frac{(\lambda s)^j}{j!}e^{-\lambda s}\mathrm{d}B(s)$$

$$=P(A_m=i)P(A_n=j)$$

这就证明了A_m与A_n的相互独立性，类似地可采用归纳法证明A_1，A_2，…的相互独立性。此外，由（2.22）式有

$$E(A_n)=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k=\int_{0^-}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t)$$

$$=\int_{0^-}^{\infty}\lambda t\mathrm{d}B(t)=\lambda E(v_n)=\rho$$

$$E(A_n^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2a_k=\int_{0^-}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\int_{0^-}^{\infty}\frac{\lambda t(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t)$$

$$=\lambda^2\int_{0^-}^{\infty}t^2\mathrm{d}B(t)+\lambda\int_{0^-}^{\infty}t\mathrm{d}B(t)$$

$$=\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2+\rho$$ □

定理2.11 嵌入马氏链$\{N_n,\ n=1,2,\cdots\}$为不可约非周期齐次马氏链，并有一步转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\text{或有}P_{ij}=\begin{cases} a_j, & i=0 \\ a_{j-i+1}, & i>0,\ j\geqslant i-1 \\ 0, & i>0,\ j<i-1 \end{cases}$$

(2.24)

证明 设该系统初始时刻无顾客，则有$N_1=A_1$，由（2.21）式知N_n可看作A_n，N_{n-1}的函数$f_n(A_n,\ N_{n-1})$，即有

$$N_2=f_2(A_2,\ N_1)=f_2(A_2,\ A_1)\equiv g_2(A_2,\ A_1)$$

$$N_3=f_3(A_3,\ N_2)=f_3(A_3,\ f_2(A_2,\ A_1))\equiv g_3(A_3,\ A_2,A_1)\cdots$$

$$N_n=f_n(A_n,\ N_{n-1})=f_n(A_n,\ f_{n-1}(A_{n-1},\ N_{n-2}))=\cdots$$

$$\equiv g_n(A_n,\ A_{n-1},\ \cdots,\ A_2,\ A_1)$$

对于任给的非负整数$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{n-1},\ i,\ j$，当$i>0$时有

$$P(N_{n+1}=j\,|N_1=i_1,\ N_2=i_2,\ \cdots,\ N_{n-1}=i_{n-1},\ N_n=i)$$

$$=P(A_{n+1}+N_n-1=j\,|A_1=i_1,\ g_2(A_1,\ A_2)$$

$$=i_2,\ \cdots$$

$g_n(A_1, A_2, \cdots, A_n)=i)$

$=P(A_{n+1}=j-i+1 \mid A_1=i_1, g_2(A_1, A_2)$

$=i_2, \cdots, g_n(A_1, A_2, \cdots, A_n)=i)$

$$=P(A_{n+1}=j-i+1)=\begin{cases} a_{j-i+1}, & j\geqslant i-1 \\ 0, & j<i-1 \end{cases}$$

其中运用了引理2.10中$A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$的相互独立性及(2.22)式。当$i=0$时，类似地有

$$P(N_{n+1}=j \mid N_1=i_1, N_2=i_2, \cdots, N_{n-1}=i_{n-1}, N_n=i)$$
$$=P(A_{n+1}=j \mid A_1=i_1, g_2(A_1, A_2)=i_2, \cdots,$$
$$g_n(A_1, A_2, \cdots, A_n)=i)$$
$$=P(A_{n+1}=j)=a_j$$

因此可知$\{N_n, n=1, 2, \cdots\}$为齐次马氏链，并有如(2.24)式的一步转移矩阵。注意到该一步转移阵中有

$$P_{nn}>0, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$
$$P_{n,n+1}>0, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$
$$P_{n,n-1}=a_0>0, \quad n=1, 2, \cdots$$

故知所有状态互通，且为非周期，从而可知$\{N_n, n=1, 2, \cdots\}$为不可约非周期齐次马氏链。 □

定理2.12 (1) 嵌入马氏链$\{N_n, n=1, 2, \cdots\}$为遍历的充分必要条件为$\rho\equiv\lambda\cdot E(v_n)<1$，(2) 当该条件满足时，有极限分布

$$\lim_{n\to\infty} P(N_n=0)=\pi_0=1-\rho$$

$$\lim_{n\to\infty} P(N_n=j)=\pi_j, \quad j=1, 2, 3, \cdots$$

且$\{\pi_j, j=0, 1, 2, \cdots\}$有母函数

$$\Pi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n z^n=\frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z)-z}, \quad |z|\leqslant 1 \tag{2.25}$$

其中$A(z)$为$\{A_j,\ j=0,1,\cdots\}$的母函数。

证明 必要性。设$\{N_n,\ n=1,2,\cdots\}$遍历，则其平稳分布必然存在且等于极限分布。设$\lim\limits_{n\to\infty}P(N_n=j)=\pi_j$，则$\{\pi_j,\ j=0,1,\cdots\}$应满足方程组

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij},\quad j=0,1,2,\cdots$$

利用(2.24)式有

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij}=\pi_0 P_{0j}+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i P_{ij}$$

$$=\pi_0 a_j+\sum_{i=1}^{j+1}\pi_i a_{j-i+1},\quad j=0,1,2,\cdots \tag{2.26}$$

引入$\{\pi_j,\ j=0,1,\cdots\}$与$\{a_j,\ j=0,1,2,\cdots\}$的母函数

$$\Pi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j z^j,\quad |z|\leqslant 1$$

$$A(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j z^j,\quad |z|\leqslant 1$$

用z^j乘(2.26)式两端，并对j从0到∞求和得

$$\Pi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j z^j=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_0 a_j z^j+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{j+1}\pi_i a_{j-i+1}z^j$$

$$=\pi_0 A(z)+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i z^{i-1}\sum_{j=i-1}^{\infty}a_{j-i+1}z^{j-i+1}$$

$$=\pi_0 A(z)+\frac{1}{z}[\Pi(z)-\pi_0]A(z)$$

因此有

$$\Pi(z)=\frac{\pi_0(1-z)A(z)}{A(z)-z}$$

利用母函数性质：$A'(1)=E(A_n)=\rho$，$A(1)=\Pi(1)=1$，及L'Hospital法则，可由上式定出π_0。这是由于

$$1=\lim_{z\to 1}\Pi(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\pi_0(1-z)A(z)}{A(z)-z}$$

$$=\lim_{z\to 1}\pi_0\frac{A'(z)(1-z)-A(z)}{A'(z)-1}=\frac{\pi_0}{1-\rho}$$

故有

$$\pi_0=1-\rho$$

并有

$$\Pi(z)=\frac{\pi_0(1-z)A(z)}{A(z)-z}=\frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z)-z}$$

由于该马氏链为遍历，故所有极限概率均应大于零，从而应有$\pi_0=1-\rho>0$，或有$\rho<1$。

充分性由定理2.11已证$\{N_n,\ n=1,2,\cdots\}$为不可约非周期齐次马氏链，当$\rho<1$时，只须利用这样的ρ来构造一个非负的数列$\{x_j,\ j=0,1,2,\cdots\}$，并证明其满足引理2.9的条件，则遍历性即可得证。为此取$x_j=\frac{j}{1-\rho}(j=0,1,2,\cdots)$，利用(2.23)式及(2.24)式，可证当$i\geqslant 1$时有

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}x_j=\sum_{j=i-1}^{\infty}a_{j-i+1}\frac{j}{1-\rho}$$

$$=\frac{1}{1-\rho}[a_0(i-1)+a_1 i+a_2(i+1)+\cdots]$$

$$=\frac{1}{1-\rho}\left[(i-1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\right]$$

$$=\frac{1}{1-\rho}[i-1+\rho]=x_i-1$$

并有

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j} x_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{j}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho} < \infty$$

从而由引理 2.9 得知，$\{N_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$为遍历。 □

系 2.13 设 $\{N_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 为队长过程 $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$的嵌入马氏链，当 $\rho = \lambda E(v_n) < 1$ 时，其极限概率存在并构成概率分布，$\lim\limits_{n \to \infty} P(N_n = j) = \pi_j > 0$，且还有

$$\lim_{t \to \infty} P(N(t) = j) = P_j = \pi_j$$

证明 注意到顾客因服务结束而从系统离去的时刻是过程$\{N(t),\ t \geqslant 0\}$的再生点，因而利用再生过程的基本性质可以证明上述结论成立，详细证明在此从略，可参阅文献〔4〕。 □

系2.14 设$\{N(t),\ t \geqslant 0\}$为该系统的队长过程，$\{N_n,\ n=1,2,\cdots\}$为其嵌入马氏链，当$\rho < 1$时，有 $\lim\limits_{t \to \infty} P(N(t) = j) = \lim\limits_{n \to \infty} P(N_n = j) = P_j$，$j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，则概率分布$\{P_j,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$满足如下递推方程组

$$\begin{cases} P_0 = P_0 a_0 + P_1 a_0 \\ P_1 = P_0 a_1 + P_1 a_1 + P_2 a_0 \\ \qquad \cdots \\ P_j = P_0 a_j + P_1 a_j + P_2 a_{j-1} + \cdots + P_{j+1} a_0 \\ \qquad \cdots \end{cases} \tag{2.27}$$

其中 a_j 满足（2.22）式

证明 当$\rho < 1$时，利用系 2.13 的结论及（2.26）式可得

$$P_j = P_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} P_i a_{j-i+1} = P_0 a_j + P_1 a_j + P_2 a_{j-1} + \cdots + P_{j+1} a_0,\quad j = 0,\ 1,\ \cdots$$

将上式展开，即可得递推方程组（2.27）式。 □

2. 平稳状态下的数字特征

定理2.16 在$M/G/1/\infty$系统中，当$\rho=\lambda E(v_n)<1$时

$$L=\rho+\frac{\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2}{2(1-\rho)},\quad L_q=L-\rho$$

$$W=E(v_n)+\frac{\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2}{2\lambda(1-\rho)},\quad W_q=\frac{\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} \tag{2.28}$$

证明 引进符号$\delta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，则(2.21) 式可改写成

$$N_{n+1}=N_n-\delta(N_n)+A_{n+1} \tag{2.29}$$

对上式两端取期望，并利用统计平衡状态时的特性：$E(N_{n+1})=E(N_n)=E(N)$，可得

$$E(\delta(N_n))=E(A_{n+1}) \tag{2.30}$$

再将（2.29）式两端平方，并利用特性：$[\delta(N_n)]^2=\delta(N_n)$，$\delta(N_n)\cdot N_n=N_n$，可得

$$N_{n+1}^2=N_n^2+\delta(N_n)+A_{n+1}^2-2N_n+2N_nA_{n+1}$$
$$-2\delta(N_n)A_{n+1}$$

对上式两端取期望，并利用$E(N_{n+1}^2)=E(N_n^2)$，N_n与A_{n+1}的相互独立性以及（2.30）式，有

$$E(N_n)=\frac{E(A_{n+1}^2)+E(A_{n+1})-2[E(A_{n+1})]^2}{2(1-E(A_{n+1}))} \tag{2.31}$$

以（2.23）式之结果代入，可得

$$L=E(N_n)=\frac{\rho^2+\lambda^2\sigma_v^2+2\rho-2\rho^2}{2(1-\rho)}=\rho+\frac{\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2}{2(1-\rho)}$$

由题设条件$\rho<1$，故上式分母不为零。此外，注意到系统达到统计平衡状态后，系统的输入速率应与输出速率相等。设以$\bar{c}$表示服务员忙的平均数（$\bar{c}\leqslant 1$），则由$\lambda=\bar{c}\mu$，可得$\bar{c}=\rho$，于是有

$$L_q=L-\bar{c}=L-\rho=\frac{\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2}{2(1-\rho)}$$

下面来求平均等待时间W_q注意到在先来先服务的规则下，若第n个被服务的顾客在离开系统的瞬间所观察到的系统队长为k，则这k个顾客应该是上述离去顾客在系统中的逗留时间（等待时间T_{q_n}与服务时间v_n之和）内到达的全体顾客。利用T_{q_n}与v_n的相互独立性及全概率分解，可得

$$L=E(N_n)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(N_n=k)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(M(T_{q_n}+v_n)=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}P(M(T_{q_n}+v_n)=k\mid T_{q_n}=x,\ v_n=y)$$

$$\mathrm{d}P(T_{q_n}\leqslant x)\mathrm{d}P(v_n\leqslant y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{[\lambda(x+y)]^k}{k!}e^{-\lambda(x+y)}\mathrm{d}W_q(x)\mathrm{d}B(y)$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\lambda(x+y)\mathrm{d}W_q(x)\mathrm{d}B(y)$$

$$=\lambda[E(T_q)+E(v_n)]=\lambda W_q+\rho$$

将前述求得的$L=\dfrac{\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2}{2(1-\rho)}+\rho$代入，可得

$$W_q=\frac{\lambda^2\sigma_v^2+\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}$$

显然有

$$W=W_q+E(v_n)$$

□

3. 平稳状态下的队长分布与等待时间分布

定理2.16 在$M/G/1/\infty$系统中，当$\rho=\lambda E(v_n)<1$时，系统能达到统计平衡状态，此时有：（1）队长分布母函数为

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nz^n=\frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda(1-z))}{B^*(\lambda(1-z))-z}$$

$$0\leqslant z<1 \tag{2.32}$$

（2）等待时间分布的 Laplace-stieljes 变换（以下简称L-S变换）为

$$W_q^*(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda B^*(s)} \tag{2.33}$$

其中 $B^*(s)$ 为服务时间分布 $B(t)$ 的 L-S 变换，即有

$$B^*(s)=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}B(t),\ \ \mathrm{Re}(s)>0$$

(2.32) 式与 (2.33) 式称为 Pollaczek-Хинчин 公式。

证明 （1）由定理 2.12 及系 2.13 得知

$$\Pi(z)=P(z)=\frac{A(z)(1-\rho)(1-z)}{A(z)-z}$$

注意到

$$A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t)z^k$$

$$=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\lambda t(1-z)}\mathrm{d}B(t)=B^*(\lambda(1-z))$$

以 $A(z)=B^*(\lambda(1-z))$ 代入 (2.25) 式可得

$$P(z)=\frac{A(z)(1-\rho)(1-z)}{A(z)-z}$$

$$=\frac{B^*(\lambda(1-z))(1-\rho)(1-z)}{B^*(\lambda(1-z))-z}$$

$$0\leqslant z<1$$

(2.32) 式得证。

（2）采用类似于求 W_s 的方法有

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^kP(N_s=k)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\int_{0^-}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty}P(M(T_{q_n}+v_n)=k\,|T_{q_n}=x,\ v_n=y)\mathrm{d}W_q(x)\mathrm{d}B(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\int_{0^-}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty}\frac{[\lambda(x+y)]^k}{k!}e^{-\lambda(x+y)}$$

$$\cdot dW_q(x)dB(y)$$

$$=\int_{0^-}^{\infty} e^{-\lambda x(1-z)}dW_q(x)\int_{0^-}^{\infty} e^{-\lambda y(1-z)}dB(y)$$

$$=W_q^*(\lambda(1-z))B^*(\lambda(1-z)) \tag{2.34}$$

其中

$$W_q^*(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dW_q(t) \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

以（2.34）式代入（2.32）式，并令$\lambda(1-z)=s$，可得

$$W_q^*(s)=\frac{(1-\rho)(1-z)}{B^*(\lambda(1-z))-z}=\frac{(1-\rho)s}{\lambda B^*(s)+s-\lambda}$$

□

4．应用

例2.6 利用本节所得$M/G/1/\infty$系统的结论，求解$M/M/1/\infty$系统在平衡状态下的队长分布，等待时间分布及其期望值。

解 在$M/M/1/\infty$系统中，由于服务时间v_n服从负指数分布，故其分布函数$B(t)$的L-S变换当$\mathrm{Re}(s)>0$及$\rho<1$时为

$$B^*(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dB(t)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\mu e^{-\mu t}dt=\frac{\mu}{s+\mu}$$

于是，由（2.32）式知其队长分布母函数为

$$P(z)=(1-\rho)\frac{(1-z)B^*(\lambda(1-z))}{B^*(\lambda(1-z))-z}$$

$$=(1-\rho)\frac{(1-z)\dfrac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu}}{\dfrac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu}-z}=\frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

$$=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}(\rho z)^n,\quad |z|<1$$

比较等式两边幂级数的系数可得

$$P_n=\rho^n(1-\rho),\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$L=\frac{dP(1)}{dz}=\frac{d}{dz}\left[\frac{1-\rho}{1-\rho z}\right]\Bigg|_{z=1}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

由（2.33）式知等待时间的L-S变换为

$$W_q^*(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\frac{\lambda\mu}{s+\mu}}$$

$$=1-\rho+\frac{(1-\rho)\lambda}{s+\mu-\lambda}=P(W_q=0)$$

$$+\rho\frac{\mu-\lambda}{s+(\mu-\lambda)}$$

从而有

$$W_q(t)=1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t},\quad t\geqslant 0$$

$$W_q=-\frac{dW_q^*(0)}{ds}=-\frac{d}{ds}\left[\frac{(1-\rho)(s+\mu)}{s+\mu-\lambda}\right]\Bigg|_{s=0}$$

$$=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

例2.7 利用本节$M/G/1/\infty$系统的结论，求$M/D/1/\infty$与$M/E_k/1/\infty$系统能达到统计平衡状态的充要条件以及统计平衡状态下的L，L_q，W，W_q。

解 （1）在$M/D/1/\infty$系统中，设服务时间$v_n=1/\mu>0$为常数，则系统能达到统计平衡状态的充要条件为$\rho=\lambda\cdot 1/\mu<1$，当此条件满足时，由于$\sigma_{v_n}^2=0$，故由（2.28）式知

$$L=\rho+\frac{\rho^2}{2(1-\rho)},\quad L_q=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W=\frac{1}{\mu}+\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)},\quad W_q=\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}$$

（2）在$M/E_k/1/\infty$系统中，服务时间服从k级Erlang分布，即有分布密度

$$b(t)=\frac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\mu t},\quad t\geqslant 0,\quad \mu>0$$

容易求得$E(v_n)=1/\mu$、$D(v_n)=1/k\mu^2$。系统能达到统计平衡

状态的充要条件显然为$\rho = \lambda \cdot 1/\mu < 1$。此时由于$\lambda^2\sigma_v^2 = \rho^2/k$，代入（2.23）式可得

$$L = \rho + \frac{\frac{\rho^2}{k} + \rho^2}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}, \quad L_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{(k+1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}, \quad W_q = \frac{(k+1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}$$

例2.8 某工厂有大量同类机器生产某种产品，机器的故障发生流为 Poisson 流，平均到达率$\lambda = 5$次/小时。该厂配有一名高级技术员以修理发生故障的机器。设机器有两类故障，该技工对这两类故障的修理时间分别为 9 分与 12 分，且根据长期观察，这批机器有$\frac{1}{3}$的故障属于后一类。为搞好管理，工厂管理者希望知道在目前的修理水平下，工厂同时有三台以上机器处于故障状态的概率。

解 由题设，该系统为$M/G/1/\infty$系统，$\lambda = 5$次/小时，修理技工对各次故障的修复时间v_n独立同分布，并有如下二点分布列

$$P(v_n = 9) = \frac{2}{3}, \quad P(v_n = 12) = \frac{1}{3}$$

于是有

$$E(v_n) = 9 \times \frac{2}{3} + 12 \times \frac{1}{3} = 10 \text{ 分/次} = \frac{1}{6} \text{ 小时/次}$$

$$\rho = \lambda E(v_n) = \frac{5}{6} < 1$$

因而该系统能达到统计平衡状态。若设N表示系统达到统计平衡状态后任一时刻队长（也就是处于故障状态的机器数），则问题所求的概率即为$P(N > 3) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3$。为求$P_i$，需先求出$a_k$，将$v_n$的二点分布律代入（2.22）式可得

$$a_k=\int_{0^-}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}B(t)$$

$$=\frac{\left(5\times\frac{9}{60}\right)^k}{k!}e^{-5\times\frac{9}{60}}\times\frac{2}{3}$$

$$+\frac{\left(5\times\frac{12}{60}\right)^k}{k!}e^{-5\times\frac{12}{60}}\times\frac{1}{3}$$

分别以 $k=0$，1，2代入，有

$$a_0=\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{3}e^{-1}\approx 0.4375$$

$$a_1=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{3}e^{-1}\approx 0.3588$$

$$a_2=\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2!}e^{-1}\approx 0.1499$$

以 a_0，a_1，a_2代入（2.27）式方程组有

$$P_0=1-\rho=\frac{1}{6}$$

$$P_0=P_0a_0+P_1a_0=0.4375P_0+0.4375P_1$$

$$P_1=P_0a_1+P_1a_1+P_2a_0=0.3588P_0+0.3588P_1+0.4375P_2$$

$$P_2=P_0a_2+P_1a_2+P_2a_1+P_3a_0=0.1499P_0+0.1499P_1$$
$$+0.3588P_2+0.4375P_3$$

利用上述方程组的递推性，可依次解得

$$\begin{cases}P_0=0.1666\\P_1=0.2143\\P_2=0.1773\\P_3=0.1293\end{cases}$$

$$P(N>3)=1-P_0-P_1-P_2-P_3=0.3125$$

（二）$GI/G/1/\infty$系统

$GI/G/1/\infty$系统有如下特性：（1）顾客相继到达时间间隔$\{\tau_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$是独立同分布的非负随机变量序列，$\tau_n$有分布函数$A(t)=P(\tau_n\leqslant t)$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。$E(\tau_n)=\int_{0^-}^{\infty}t\mathrm{d}A(t)=\frac{1}{\lambda}$，其中$\lambda>0$为一常数。（2）各顾客的服务时间过程$\{v_n,\ n=1,\ 2,\cdots\}$是独立同分布的非负随机变量序列，并有分布函数$B(t)=P(v_n\leqslant t)$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。$E(v_n)=\int_{0^-}^{\infty}t\mathrm{d}B(t)=\frac{1}{\mu}$，其中$\mu>0$为一常数。（3）系统有一个服务员，顾客到达后排成一列，按照先来先服务的原则接受服务。（4）系统容量为∞。（5）到达过程$\{\tau_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$与服务过程$\{v_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$相互独立。

限于篇幅，本节仅介绍$GI/G/1/\infty$系统在平稳状态下的等待时间分布的有关理论。

定理2.17 在$GI/G/1/\infty$系统中，设T_{q_n}表示第n个到达系统的顾客在系统中的等待时间。$W_{q_n}(x)$为其相应的分布函数，则有

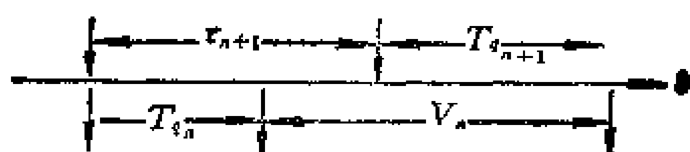
$$（1）W_{q_{n+1}}(x)=\int_{-\infty}^{x}W_{q_n}(x-t)\mathrm{d}G(t)$$

$$其中G(x)=\int_{0^-}^{\infty}B(x+t)\mathrm{d}A(t)$$

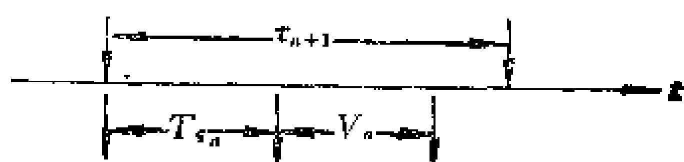
即$W_{q_{n+1}}(x)$是$W_{q_n}(x)$与$G(x)$的卷积，$n=1,\ 2,\ \cdots$。

（2）极限$\lim\limits_{n\to\infty}W_{q_n}(x)=W_q(x)$存在，且$W_q(x)$为单调非降右连续函数，并满足方程$W_q(x)=W_q(x)*G(x)$

证明 为方便起见，不妨设初始时刻系统无顾客，即$N(0)=0$。显然，此时有$T_{q_1}=0$。对于$T_{q_{n+1}}$，观察图2-18（a）、（b）可知有



(a)



(b)

图 2-18

$$T_{q_{n+1}}=\begin{cases} T_{q_n}+v_n-\tau_{n+1}, & T_{q_n}+v_n\geqslant\tau_{n+1} \\ 0 & , T_{q_n}+v_n<\tau_{n+1} \end{cases}$$

上式亦可改写为 $T_{q_{n+1}}=\max\{T_{q_n}+v_n-\tau_{n+1},\ 0\},\quad n\geqslant 1$ (2.35)

（1）取 $u_n=v_n-\tau_{n+1}$，则由系统特性（1）、（2）、（5）易知 $\{u_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且有 $E(|u_n|)<\infty$。若记 u_n 的分布函数为 $G(x)$，则有

$$\begin{aligned} G(x)&=P(u_n\leqslant x)=P(v_n\leqslant x+\tau_{n+1}) \\ &=\int_{0^-}^{\infty}P(v_n\leqslant x+t)\mathrm{d}P(\tau_{n+1}\leqslant t) \\ &=\int_{0^-}^{\infty}B(x+t)\mathrm{d}A(t) \end{aligned}$$

考虑到 T_{q_n} 与 u_n 相互独立，故对任何 $x\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} W_{q_{n+1}}(x)&=P(\max(T_{q_n}+u_n,\ 0)\leqslant x)=P(T_{q_n}+u_n\leqslant x) \\ &=\int_{-\infty}^{x}P(T_{q_n}+u_n\leqslant x|u_n=y)\mathrm{d}G(y) \\ &=\int_{-\infty}^{x}W_{q_n}(x-y)\mathrm{d}G(y),\quad n\geqslant 1 \qquad (2.36) \end{aligned}$$

（2）利用（2.35）式，并注意到 u_1，u_2，$\cdots$，独立同分布，便有

$$T_{q_n}=\max\{0, T_{q_{n-1}}+u_{n-1}\}=\max\{0, \max\{0, T_{q_{n-2}}+u_{n-2}\}+u_{n-1}\}=\max\{0, u_{n-1}, T_{q_{n-2}}+u_{n-2}+u_{n-1}\}$$

$$=\max\{0, u_{n-1}, \max\{0, T_{q_{n-3}}+u_{n-3}\}+u_{n-2}+u_{n-1}\}$$

$$=\cdots=\max\{0, u_{n-1}, u_{n-1}+u_{n-2}, \cdots, u_{n-1}+u_{n-2}+\cdots+u_1\}$$

$$=\max\{0, u_1, u_1+u_2, \cdots, u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}\}$$

其中最后第二个等式利用$T_{q_1}=0$。对上述等式，引进符号$h_n=\sum_{l=1}^{n}u_l$，则对任何$x\geqslant 0$有

$$W_{q_{n+1}}(x)=P(T_{q_{n+1}}\leqslant x)=P(\max\{0, h_1, h_2, \cdots h_n\}\leqslant x)$$

$$=P(h_l\leqslant x, 1\leqslant l\leqslant n)=P\left(\bigcap_{l=1}^{n}(h_l\leqslant x)\right) \tag{2.37}$$

综合$x<0$时，$W_{q_{n+1}}(x)=0$的情况可知，对任何x，$W_{q_n}(x)$关于n是单调非增的，从而极限$\lim\limits_{n\to\infty}W_{q_n}(x)$存在，记为$W_q(x)$，即有

$$W_q(x)=\lim_{n\to\infty}W_{q_n}(x)=P(h_l\leqslant x, l=1, 2, \cdots)$$

$$=P\left(\sup_{l\geqslant 1}(h_l)\leqslant x\right)$$

由于对每个n，$W_{q_n}(x)$均为一分布函数，因而关于x是单调非降右连续的，从而易证其当$n\to\infty$时的极限函数也是关于x单调非降右连续的。最后，利用控制收敛定理，对（2.36）式两端取极限，便有

$$W_q(x)=\int_{-\infty}^{x}W_q(x-y)\mathrm{d}G(y)$$

定理2.18 在$GI/G/1/\infty$系统中，设T_{q_n}表示第n个到达系统的顾客在系统中的等待时间，$W_{q_n}(x)$为其相应的分布函

数，并有 $\lim\limits_{n\to\infty} W_{q_n}(x)=W_q(x)$。则当 $\rho=\lambda/\mu<1$时，$W_q(x)$ 构成概率分布，其中 $1/\lambda=E(\tau_n)$，$1/\mu=E(v_n)$。

证明 取 $u_n=v_n-\tau_{n+1}$，则由前知 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，独立同分布，$E(|u_n|)<\infty$，故由强大数定律知有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{l=1}^{n} u_l}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{n}=E(u_1),\quad (a.s.)$$

或对任给 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\left(\left|\frac{h_n}{n}-E(u_1)\right|<\varepsilon\right)\right)=1$$

此即说明，对于任给的 $\delta>0$，$\varepsilon>0$，必存在 $N_{\varepsilon,\delta}$，有

$$1-\delta<P\left(\left|\frac{h_n}{n}-E(u_1)\right|<\varepsilon,\quad n\geqslant N_{\varepsilon,\delta}\right) \quad (2.38)$$

由题设 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{E(v_n)}{E(\tau_{n+1})}<1$．此即 $E(u_n)<0$，$n=1,2,\cdots$。因而可取足够小的 $\varepsilon>0$，使 $\varepsilon+E(u_1)<0$，则可从(2.38)式得知，对于任给的 $\delta>0$，总存在 N_δ，使当 $x\geqslant 0$ 时有

$$1-\delta<P\left(\left|\frac{h_n}{n}-E(u_1)\right|<\varepsilon,\quad n\geqslant N_\delta\right)$$

$$\leqslant P\left(\frac{h_n}{n}<E(u_1)+\varepsilon,\quad n\geqslant N_\delta\right)\leqslant P(h_n<x,\quad n\geqslant N_\delta)$$

$$(2.39)$$

另一方面，对于上述给出的 N_δ，由于 $W_{q_{N_\delta}}(x)$ 为分布函数，故利用(2.37)式知

$$\lim_{x\to\infty} W_{q_{N_\delta}}(x)=\lim_{x\to\infty} P(h_l\leqslant x,\quad 1\leqslant l<N_\delta)=1$$

因而取足够大的 x，便有

$$1-\delta\leqslant P(h_l\leqslant x,\quad 1\leqslant l<N_\delta) \quad (2.40)$$

综合 (2.39) 与 (2.40) 式知，对于任给的 $\delta>0$，总存在足够大的 x，使得

$$W_a(x)=\lim_{n\to\infty}W_{a_n}(x)=\lim_{n\to\infty}(h_l\leqslant x,\ 1\leqslant l<n)$$

$$=P(h_n\leqslant x,\ \text{一切}\ n)=P((h_n\leqslant x,\ n\geqslant N_\delta)\cap(h_n\leqslant x,\ 1\leqslant n<N_\delta))\geqslant P(h_n\leqslant x,\ n\geqslant N_\delta)$$

$$+P(h_n\leqslant x,\ 1\leqslant n<N_\delta)-1>1-2\delta$$

其中最后第二个不等式利用了性质

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$$

从而有 $\lim\limits_{x\to\infty}W_a(x)=1$ □

§2.5* 排队系统的统计推断

在前述各节中，我们都是从一个给定的排队系统（给定模型类别及有关参数）出发来研究系统的有关特性，如队长分布、等待时间分布、忙期分布等及其数字特征。然而，对于一个给定的实际排队系统，究竟如何来判断其模型类别及获取有关参数呢？一般来说，如无先验知识，只能对给定系统进行观察，然后根据观察数据通过统计推断来解决上述问题。这就是排队系统的统计推断问题。

排队系统的统计推断问题，本质上属于过程统计领域，它与古典统计推断理论一样，分参数估计与假设检验两大部分。其中参数估计分为点估计与区间估计，假设检验则包括：（1）分布拟合度检验，即推断相继到达时间间隔、服务时间、等待时间等服从什么类型分布；（2）独立性检验。在大多数排队模型中，总是假定相继到达时间间隔是独立同分布的，到达过程与服务过程也是相互独立的，对于一个具体的排队系统，显然应经过检验；（3）

统计平衡检验，即对于一个给定的排队系统，在考察时刻是否已达到统计平衡？或者还要经过多长时间，方可认为基本上达到统计平衡；（4）平稳性检验，即相继到达时间间隔或服务时间的分布类型及参数是否随时间变化？考虑到在排队论的应用中，Poisson 排队系统的特性易于研究，因此本节仅介绍指数模型及 Poisson 流的分布拟合度检验与参数估计问题，至于独立性问题，通常可以从系统本身的物理含义中去验证（当然也可用时间序列分析的有关方法来解决该问题，在此从略）。

（一）指数模型的统计推断

指数模型的统计推断问题包括分布拟合度检验、参数估计与区间估计问题。

1. 分布拟合度检验

引理2.19 设 X_1，X_2，…，X_n 是独立同分布的连续型随机变量，有密度函数 $f(x)$、分布函数 $F(x)$。$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 是其顺序统计量，$(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)})$ 有分布函数 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，密度函数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则有

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n)=n!\prod_{j=1}^{n}F(x_j),\quad x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=n!\prod_{j=1}^{n}f(x_j),\quad x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n \tag{2.41}$$

证明 考虑满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 的 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，显然有

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n)=P(X_{(1)}\leqslant x_1, \cdots, X_{(n)}\leqslant x_n)$$

$$=\sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)}P(X_{i_1}\leqslant x_1, \cdots, X_{i_n}\leqslant x_n)$$

$$=n!\prod_{j=1}^{n}F(x_j)$$

其中 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列，而这样的排列共有 $n!$ 个。利用上述结论易得

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} G(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \square$$

定理2.20 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，其分布函数 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$，$x \geqslant 0$，$\lambda > 0$。$0 = X_{(0)} \leqslant X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$ 为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的顺序统计量。(1)作 $s_i = (n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$X_{(0)} = 0$ 则有 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 独立同分布，且其分布函数亦为 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$，$x \geqslant 0$。(2)作 $F = \left(\frac{\sum_{i=1}^{r} S_i}{r}\right) \Big/ \left(\frac{\sum_{i=r+1}^{n} S_i}{n-r}\right)$，其中 $r = \left[\frac{n}{2}\right]$，则有 $F \sim F(2r, 2(n-r))$。

证明 (1)由引理2.19知，$(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)})$ 有联合密度函数

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= n! \prod_{i=1}^{n} (\lambda e^{-\lambda x_i})$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

若记

$$\sigma_n = \{(x_1, \cdots x_n):\ 0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\ (n - i + 1)(x_i - x_{i-1}) > t_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

作变量替换 $y_i = (n - i + 1)(x_i - x_{i-1})$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

则可将积分域 σ_n 变为区域 T_n，其中

$$T_n=\{(y_1,\cdots,y_n):\ y_i>t_i,\quad i=1,2,\cdots,n\}$$

于是，对任何 $t_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$P(s_1>t_1,\ s_2>t_2,\ \cdots,\ s_n>t_n)$$

$$=n!\int\cdots\int_{\sigma_n}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=n!\int\cdots\int_{T_n}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{n-i+1}\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{t_i}^{\infty}\lambda e^{-\lambda y_i}\mathrm{d}y_i\right)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda t_i}$$

从而知 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 确有独立同负指数分布的特性。

（2）取 $T_a=\sum\limits_{i=1}^{r}s_i$，由（1）之结论及附录二定理7.7可知，$T_a\sim E_r(\lambda)$。注意到对任何 $x\geqslant 0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(2\lambda T_a\leqslant x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P\left(T_a\leqslant\frac{x}{2\lambda}\right)=\frac{1}{2^r\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-x/2}$$

因此知 $2\lambda T_a\sim\chi^2(2r)$。同理取 $T_b=\sum\limits_{i=r+1}^{n}s_i$，可以证明 $2\lambda T_b\sim\chi^2(2(n-r))$。利用 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 的相互独立性，可得

$$F=\left[\frac{2\lambda T_a}{2r}\right]\Big/\left[\frac{2\lambda T_b}{2(n-r)}\right]=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}s_i}{r}\right]\Big/\left[\frac{\sum\limits_{i=r+1}^{n}s_i}{n-r}\right]$$

$$\sim F(2r,2(n-r))$$

□

利用定理2.25可检验独立同分布样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,$

x_n是否来自指数总体，其基本作法如下：

（1）将样本观察值 x_1，x_2，…，x_n 按大小顺序排列 $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots\cdots \leqslant X_{(n)}$

（2）取 $X_{(0)}=0$，分别计算 $s_i=(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})$，$i=1$，$2$，…，$n$ 及 F 值，其中 $r=\left[\frac{n}{2}\right]$，

$$F=\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} s_i}{r}\right)\Bigg/\left(\frac{\sum_{i=r+1}^{n} s_i}{n-r}\right)$$

（3）对于给定的水平 α，若上述 F 值落入区间 $(F_{\alpha/2}(2r,2(n-r)),F_{1-\alpha/2}(2r,2(n-r)))$ 内，则在水平 α 上接受 H_0，认为上述样本来自指数总体，否则拒绝 H_0。

上述方法称为 F 检验法，对于指数模型的分布拟合度检验，除 F 检验法外，还有图检验法，K-S 检验法，A-D检验法等等，可参阅文献〔2〕。

2．参数估计

对于给定的指数总体 $X \sim F(x)=1-e^{-\lambda x}$，$x \geqslant 0$，可用极大似然估计量

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

来作为未知参数 λ 的估计值。这是由于其似然函数为

$$L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)=\prod_{j=1}^{n} f(x_j, \lambda)=\lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j}$$

取对数有

$$\ln Ln(x_1, \cdots, x_n, \lambda)=n\ln\lambda-\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j$$

解方程$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Ln(x_1, \cdots, x_n, \lambda)=0$可得

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

（二）Poisson流检验

对于一个给定的顾客流，为检验其是否为 Poisson 流，通常可采用如下两种方法：（1）定时结束检验法，（2）定数结束检验法，它们根据的是如下原理。

引理2.21 设$U_1, U_2, \cdots, U_n$独立同分布，U_j在$(0, t)$上均匀分布。$U_{(1)}\leqslant U_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant U_{(n)}$为$U_1, U_2, \cdots, U_n$的顺序统计量。则$(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$有联合密度

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\frac{n!}{t^n}, \quad 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n< t$$

证明 注意到U_j有分布密度$f(t_j)=1/t$，$t_j\in(0, t)$，$j=1, 2, \cdots, n$。并利用引理2.19，即可得证。 □

定理2.22 设$\{M(t), t\geqslant 0\}$为参数λ的Poisson流，其中$M(t)$表示$(0, t]$内到达系统的顾客数，s_n表示第n个顾客的到达时刻，则在已知$M(t)=n$的条件下，$(s_1, s_2, \cdots, s_n)$与$(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$同分布。其中$U_{(1)}\leqslant U_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant U_{(n)}$是在$(0, t)$上独立且同均匀分布的随机变量$U_1, U_2, \cdots, U_n$的顺序统计量。即在$M(t)=n$的条件下，$(s_1, s_2, \cdots, s_n)$有联合密度

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\frac{n!}{t^n}, \quad 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n< t$$

证明 由于$s_1<s_2<\cdots<s_n$，故可取t_j与足够小的$h_j>0$（$j=1, 2, \cdots, n$），使满足

$$t_1 < s_1 \leqslant t_1 + h_1 < t_2 < s_2 \leqslant t_2 + h_2 < t_3 \cdots\cdots$$

$$< t_n < s_n \leqslant t_n + h_n < t$$

利用 Poisson 流的概率特性有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}(t_j < s_j \leqslant t_j + h_j),\ M(t) = n\right)$$

$$= P\left(M(t_1) = 0,\ \bigcap_{j=1}^{n-1}(M(t_j,\ t_j + h_j) = 1, M(t_j + h_j,\right.$$

$$\left. t_{j+1}) = 0),\ M(t_n,\ t_n + h_n) = 1, M(t_n + h_n,\ t) = 0\right)$$

$$= e^{-\lambda t_1}\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda h_j e^{-\lambda h_j})\prod_{j=1}^{n-1}e^{-\lambda(t_{j+1} - t_j - h_j)}\cdot \lambda h_n e^{-\lambda h_n}$$

$$\cdot e^{-\lambda(t - t_n - h_n)} = \lambda^n\left(\prod_{j=1}^{n}h_j\right)e^{-\lambda t}$$

于是对任何 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n < t$，有

$$f(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$$

$$= \lim_{\substack{\max h_j \to 0 \\ j}} \frac{P\left(\bigcap_{j=1}^{n}(t_j < s_j \leqslant t_j + h_j) \mid M(t) = n\right)}{h_1 h_2 \cdots h_n}$$

$$= \lim_{\substack{\max h_j \to 0 \\ j}} \frac{P\left(\bigcap_{j=1}^{n}(t_j < s_j \leqslant t_j + h_j),\ M(t) = n\right)}{\prod_{j=1}^{n}h_j P(M(t) = n)}$$

$$= \lim_{\substack{\max h_i \to 0 \\ i}} \frac{\lambda^n \prod_{i=1}^{n} h_i e^{-\lambda t}}{\prod_{i=1}^{n} h_i \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n}$$ □

定理2.23 设$\{M(t),\ t \geqslant 0\}$为参数λ的Poisson流，s_n表示第n个顾客的到达时刻，$M(t)$表示在$(0,\ t]$内到达系统的顾客数。则在$s_n = t$的条件下，$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1}$与在$(0,\ t)$上独立且同均匀分布的随机变量$U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_{n-1}$的顺序统计量$U_{(1)} \leqslant U_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant U_{(n-1)}$有相同的分布。即在$s_n = t$的条件下，$(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{n-1})$有联合密度

$$g(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1}|s_n = t) = \frac{(n-1)!}{t^{n-1}},\quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{n-1} < t$$

证明 与定理 2.22 完全类似，在此从略。

1. Poisson 流的定时结束验检

利用定理 2.22 可获得如下的 Poisson 流定时结束检验法，其基本作法如下：

（1）对一个顾客流，首先确定一个较大的观察结束时刻t，然后观察在时间间隔$[0,\ t]$内到达系统的顾客数，记为n，并记录其相应到达时刻，设为$s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t$。

（2）计算 $U = \sqrt{12n}\left(\frac{1}{nt}\sum_{i=1}^{n} s_i - \frac{1}{2}\right)$

（3）对于给定的水平α，由$N(0,\ 1)$表可查双侧α分位点$z_{\alpha/2}$，若上述计算的U落在区间$(-z_{\alpha/2},\ z_{\alpha/2})$内，则在$\alpha$水平下接受$H_0$，即认为上述样本来自 Poisson 流总体，或认为所观察的顾客流可确认为 Poisson 流，否则，则拒绝H_0。

上述方法的原理是明显的，这是由于若设H_0:$\{M(t),\ t \geqslant 0\}$为 Poisson 流，则由定理 2.22 知$(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$与$(U_{(1)},$

$U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$有相同的分布，其中$U_{(1)} \leqslant U_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant U_{(n)}$是$U_1$，$U_2, \cdots, U_n$的顺序统计量，而$U_1, U_2, \cdots, U_n$独立同均匀分布，并有$E(U_j)=\dfrac{t}{2}$，$D(U_j)=\left(\dfrac{t}{\sqrt{12}}\right)^2$。考虑到$U_j$虽然与$U_{(j)}(j=1,2,\cdots\cdots n)$不一定相等，但却有$\sum\limits_{j=1}^{n} U_j=\sum\limits_{j=1}^{n} U_{(j)}$，故当$n$较大时（$n \geqslant 6$），由中心极限定理可得

$$U=\frac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} U_j-\dfrac{t}{2}}{\dfrac{t}{\sqrt{12n}}}=\sqrt{12n}\left(\frac{1}{nt}\sum_{j=1}^{n} U_{(j)}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sqrt{12n}\left(\frac{1}{nt}\sum_{j=1}^{n} s_j-\frac{1}{2}\right)$$

渐近于$N(0, 1)$。于是对给定的水平α，记$z_{\alpha/2}$为标准正态变量U的双侧α百分位点，即应有

$$P(|U|>z_{\alpha/2})=\alpha$$

2. Poisson流的定数结束检验

利用定理2.23，可获得Poisson流定数结束检验法，其基本作法如下：

（1）对一个顾客流，首先确定一个较大的数n，然后观察并记录顾客相继到达系统的时刻$s_1<s_2<\cdots s_n$。

（2）计算

$$v=\sqrt{12(n-1)}\left(\frac{1}{(n-1)s_n}\sum_{j=1}^{n-1} s_j-\frac{1}{2}\right)$$

（3）对于给定的水平α，由$N(0, 1)$查双侧α百分位点$z_{\alpha/2}$，若上述计算的v落在区间$(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$内，则在$\alpha$水平下接受$H_0$，即认为所观察的顾客流为Poisson流，否则，拒绝H_0。

有关上述检验法的正确性理由与定时结束检验法类似，在此从略。

例2.9 某工厂有大批同类机床，机床发生故障可视为顾客的到达，现对该故障流作定数结束统计检验，取 $n=6$，并记录到故障的相继发生时刻分别为

194，209，250，279，312，493　　（小时）

试以水平 $\alpha=0.05$ 来判断该故障流是否为 Poisson 流。

解 取 $\alpha=0.05$，查表得双侧 α 百分位点 $z_{\alpha/2}=1.96$。计算当 $n=6$ 时

$$v=\sqrt{12(n-1)}\left[\frac{1}{(n-1)s_n}\sum_{j=1}^{n-1}s_j-\frac{1}{2}\right]=0.036$$

由于 $v\in(-1.96,\ 1.96)$，故该故障流可认为是 Poisson 流。

习　题　二

1．举出三种不同类型的排队系统的例子(要求与本书所举之例不同)，并指出该系统的顾客、服务员的实际含义以及该系统的分类符号。

2．设顾客到达过程为 Poisson 流，平均到达率 $\lambda=2$人/分。（1）求到达过程中相继到达顾客的平均间隔时间。（2）求第四个到达系统的顾客其到达时刻分布及其平均值。（3）若在 $t=0$ 时系统是空的，求直到 $t=20$分时为止已到达系统的平均顾客数。（4）若在 $t=4$ 分时已到达一个顾客，求在 $t=4$ 分和 $t=5$ 分之间又到达一个顾客的概率。

3．随机过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$有状态空间 $I=\{0,\ 1,\ 2\}$。对于足够小的 Δt，在$(t,\ t+\Delta t)$内发生之状态转移密度不依赖于时间区间的起点 t，并有

$$q_{ij}=\begin{cases}\lambda, & j=i+1,\ i=0,\ 1\\ \mu, & j=i-1,\ i=1,\ 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$(\lambda>0,\ \mu>0)$$

（1）该随机过程是什么过程?（2）写出该过程的 Q 矩阵，并画出其对应的状态转移图。（3）该过程是否有统计平衡解 $\lim\limits_{t\to\infty}P(N(t)=j)=P_j$?若有，则求出其统计平衡解。

4. 齐次马氏过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$有状态空间$I=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$及Q矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda-\nu & \lambda & \nu & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda-\mu_1 & 0 & \lambda & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda-\mu_2 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix},\quad \begin{matrix}\lambda>0,\ \mu_1>0\\ \nu>0,\ \mu_2>0\end{matrix}$$

（1）写出该过程的一步转移矩阵，画出对应的状态转移图。（2）该过程是否有统计平衡解$\lim\limits_{t\to\infty}P(N(t)=j)=P_j$？若有，则求其统计平衡解。

5. 某电话站有三条中继线。每小时平均收到60次呼唤，平均通话时间为2分钟。试求在统计平衡状态下：（1）任一时刻三条中继线被占用的概率（它又称为系统的损失概率）及每条中继线的负荷$\eta=\dfrac{L}{c}$，其中c为中继线数，L为该系统中继线平均占用数。（2）欲使系统的损失概率小于0.01，试问此时中继线应增加到几条？并计算在此情况下每条中继线的负荷η。

6. 考虑一个$M/M/3/3$系统，每分钟平均有4个顾客到达，对每个顾客的平均服务时间为0.5分。（1）求该系统的有效到达率（又称系统的绝对通过能力）λ_e及每个顾客的平均逗留时间W。（2）将上述系统的服务规则由三个服务员并行服务改为互相帮助，即若有一个顾客进入该系统时，则三个服务员将同时为该顾客服务直到结束。若其他参数不变，求新系统的λ_e与W。（3）若以λ_e为目标函数，并希望λ_e愈大愈好，问应选择哪一种服务规则？又若以W为目标函数，并希望W愈小愈好，则又应选择哪一种服务规划？并解释为什么服务员相互帮助后，λ_e会增大，而W会减少的理由（提示，上述服务员相互帮助之规则，可看作一个服务小组以3μ之速率为顾客服务，其中μ为每个服务员的平均速率。

7. 某单位电话交换台有一部200门内线的总机，已知在上班时间内，有20%内线分机平均每40分钟要一次外线电话，80%内线分机平均每二小时要一次外线电话，当接通后平均通话时间为3分钟；又知从外单位打来的电话呼唤率为平均每分钟一次，而接通后的平均通话时间亦为3分钟。若设以上的相继到达呼唤间隔及通话时间均服从负指数分布，且不考虑外单位打来电话时内线是否占用以及分机打电话时对方是否占用等情况。试

求在外线电话接通率大于95%的指标下电话交换台应设置的外线数。(提示：利用“相互独立的 Poisson 流之迭加仍为泊松流”的结论)。

8. 某电视修理部有一名电视机修理工，每天工作八小时。今设要求修理电视机的顾客到达过程为 Poisson 流，每天平均送来10台需修理的电视机。修理工修理一台电视机所耗费的修理时间服从负指数分布，平均修理时间为30分钟。(1) 该排队系统能否达到统计平衡，为什么？(2) 若能达到统计平衡状态，试求出在统计平衡状态下的平均队长、平均等待队长以及电视机的平均待修时间。(3) 求修理工每天中的平均空闲时间。

9. 考虑一个$M/M/c/\infty$系统，其平均到达率为$\lambda > c$，对顾客的平均服务时间为$1/\mu > 0$，并有$\rho_c = \lambda/c\mu < 1$。若设$c_0$表示系统达到统计平衡状态时平均空闲的服务员数，试证明有等式$c_0 = c(1-\rho_c)$。

10. 设$M/M/1/\infty$系统的平均到达率为$\lambda(>0)$，平均服务率为$\mu > 0$，试求系统达到统计平衡状态后顾客在该系统内的逗留时间分布。

11. 某修理店有一台检测机为顾客提供服务，它对顾客所携带的器具进行检修，其检修时间服从正态分布，平均检修时间为6分钟，方差$\sigma^2 = 1/8$小时^2。设顾客的到达流为 Poisson 流，平均到达率$\lambda = 4$人/小时，试求在统计平衡状态下，(1) 该店内的平均队长与平均等待队长。(2)顾客的平均等待时间与平均逗留时间。

12. 某工厂有一批数量较大的机器(可视作∞台机器)，机器的故障到达流为 Poisson 流，平均到达率为$\lambda > 0$；工厂有一个修理组负责修理发生故障的机器，设修理时间为一般分布，且各次修理相互独立，平均修理时间为$1/\mu > 0$。修理组拟从具有不同效果的三种操作方法中选择一种，以使其平均等待时间为最小，问应采用何种操作方法？其中：当采用操作方法Ⅰ时，将使修理时间标准差σ与平均修理时间$E(v)$相等；当采用操作法Ⅱ时，有$\sigma = \frac{1}{2}E(v)$；当采用操作法Ⅲ时有$\sigma = 0$。

13. 考虑一个单服务员排队系统，其顾客输入过程为 Poisson 流，平均到达率为$\lambda > 0$，对每个顾客的平均服务时间$E(v) = 1/\mu > 0$，其服务时间的概率分布可为：定长分布；负指数分布；k阶 Erlang 分布。(1)分别求出每个顾客在上述系统中接受不同的三种服务分布时所需的平均等待时间W_q。(2) 设$e = \frac{W_q}{E(v)}$，它称为服务机构的效率，显然e愈小，服务效率愈高。若以e_D，e_M，e_{E_k}分别表示该系统在上述三种不同概率分布

时的服务机构效率，试证明有关系式：

$$e_M = 2e_D, \quad \lim_{k\to\infty} e_{E_k} = e_D$$

14．利用$M/G/1/\infty$系统的 Pollaczek-Хинчин 公式求$M/E_k/1/\infty$系统的平稳状态概率P_n的母函数以及统计平衡状态下进入系统的顾客之等待时间的$L-S$变换。

15．考虑一个$M/M/\infty$系统，顾客到达流为 Poisson 流，平均到达率为$\lambda>0$；对每个顾客的服务时间v_1，v_2，…独立同负指数分布。平均服务率为μ；有足够多个服务员（以至可看作∞），故不会产生排队等待现象；到达过程与服务过程相互独立。（1）建立描述该系统队长的随机过程，讨论该过程的概率特性（主要讨论遍历性）。（2）求该系统在稳定状态下的队长分布及平均队长。

16．两个修理工人看管五台机器，每台机器的正常运转时间（寿命）相互独立且同负指数分布，平均寿命为20分钟；两个工人技术相同，对每台机器的修理时间亦相互独立并服从负指数分布，平均修理时间为15分钟；机器寿命与修复时间相互独立，且修好的机器其概率特性与新机器一样。当该系统运行足够大时间后，试求：（1）两个修理工都空闲的概率；恰有一个修理工空闲的概率。（2）等待修理的机器的平均数及机器的利用率$\xi=a/m$，其中m为机器数，a为统计平衡状态下任一时刻正常运转机器的平均数。（3）平均忙的工人数$\bar{c}$及工人的操作效率$\eta=\bar{c}/c$，其中c为工人数。

17．一个工人看管m台自动机床（$m\geqslant1$），当机床发生故障而停止运转时，立即由工人来负责修理，若当机床发生故障时，该工人正在修理其他损坏的机床，则该机床只能等待修理。今设每台机床的修复时间服从参数为$\mu>0$的负指数分布，每台机床的寿命服从参数为$\lambda>0$的负指数分布；各台机床在任何不同时间区间内的工作与修理是相互独立的。设W_t表示自时刻t开始将现有的已处于损坏状态的机床全部修复所需的总修复时间（在t时刻后新损坏机床的修复时间不计在内）。试求在统计平衡状态下总修复时间W_t的分布函数及平均总修复时间$E(W_t)$。

18．一个数据处理系统，其数据到达流为Poisson流，平均到达率$\lambda=2$个/秒．系统有一数据处理器实行对数据的处理与加工，处理与加工时间服从负指数分布。其处理方式为：若在开始处理的瞬间，系统仅有一个数据，则

对数据的平均处理时间为1/3秒，若此时系统有二个或二个以上数据时，则可以一次处理两个数据，其平均处理时间为1/2秒，设系统容量为3．（1）建立描述该系统状态特性的随机过程，写出其状态空间，画出该系统的状态转移图．（2）判断该随机过程能否达到统计平衡，并说明理由．（3）写出该系统的稳态方程组，并求稳定状态下的队长分布与平均队长．

19．具输入控制的$M/M/c/\infty$系统：设顾客的到达为Poisson流，平均到达率为$\lambda>0$，每个服务员的平均服务率为$\mu>0$。当顾客到达时，若系统队长为n，则控制中心控制该顾客以$\frac{1}{n+1}\Delta t+o(\Delta t)$的概率进入系统。其他假设同$M/M/c/\infty$系统。（1）建立描述该系统状态的随机过程，讨论该过程的遍历性。（2）求该系统在稳定状态下的队长分布与平均等待队长，并证明当$c=1$时有稳态队长分布

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,\quad P_0=e^{-\rho},\ \text{其中}\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q=\rho+e^{-\rho}-1$$

20．一排队系统由两个子系统串联构成，子系统甲与子系统乙对顾客的服务时间分别服从参数为$\mu_1>0$与$\mu_2>0$的负指数分布，但系统容量均为1。设顾客以Poisson流到达子系统甲，平均到达率$\lambda>0$。当顾客在子系统甲服务完毕后，如果此时子系统乙空闲，即立即进入接受服务，否则只能停留在子系统甲，从而使甲系统的服务无法继续进行，直到该顾客进入乙系统时方能恢复服务（此称为破坏状态）。若设系统对各子系统内顾客的服务相互独立，并与顾客到达亦独立．（1）建立描述该系统状态的随机过程，并讨论其遍历性。（2）求平稳状态下的系统状态概率及当$\mu_1=\mu_2=\mu$时的平均队长．(3)求顾客到达系统时由于得不到服务而消失的概率．

21．考虑一成批到达$M^{(k)}/M/1/\infty$系统，其顾客到达为Poisson流，平均到达率为$\lambda>0$，但每一到达时刻不是到一个而是到k个顾客，其他特性与$M/M/1/\infty$系统相同．试求当$\rho<1$时（1）系统在统计平衡状态下队长分布$\{P_n,\ n=0,\ 1,\ \cdots\}$的母函数$G(x)$．（2）求平均队长$L$．

22．证明Poisson流定数结束检验的定理2.23．

23．对一批电器设备进行测试，首先确定在[0，500小时）内进行测试，并测得其相继到达故障间隔依次为

15，29，33，41，181，194（小时）

试判断此电器设备故障流是否为Poisson流?

第三章　系统可靠性数学理论

产品质量的高低长期以来是生产部门和消费部门所关心的重要问题之一。衡量产品质量高低的指标有技术性能指标、可靠性指标等。其中技术性能指标用来反映产品所具有的技术水平，如计算机的字长、容量、运算速度等等，而可靠性指标则反映产品维持良好性能的持久能力，或表达产品经久耐用的程度，如电视机能满意地观看多少小时不出故障等等。可靠性指标的重要性对于某些小型产品如电视机、收音机等是人所共知的，然而真正引起人们重视的则是大型复杂系统的出现。所谓系统，粗略地说是指完成某种特定功能的由一些基本部件组成的整体。对于一些大型复杂系统，如计算机系统，人造卫星系统，通信系统等等，组成系统的部件（或元器件）的失效不仅损坏其本身，而且也往往会损坏使用这些元器件的一些更大的设备或系统。因此，如何提高系统的可靠性已成为生产和军事作战部门所迫切需要解决的问题。于是，系统可靠性理论的研究也由此得到了迅速的发展。目前，系统可靠性理论包括三个方面：（1）可靠性工程，它是研究为提高系统可靠性所需采用的各种材料、工艺与设计等理论，（2）可靠性管理，它是研究为提高系统可靠性所采取的在生产管理中的各种措施的理论；（3）可靠性数学，它是研究为分析系统可靠性而运用的各种数学分析的理论。可靠性数学理论起源于本世纪三十年代，最早研究的领域有机器维修问题和材料的疲劳寿命问题等。目前，计算各种模型的系统可靠度、讨论各种模型的最优化问题（如最优维修策略、更换策略等）、可靠度的分配与预测、以及可靠性统计构成了可靠性数学理论的主要部分、本章将介绍其中的一部分内容。

§3.1 评定产品的可靠性指标

由于产品（部件、设备、系统）性质的不同，评定产品的可靠性指标也有所不同，以下仅介绍不可修产品与可修产品这两类的主要可靠性指标。

（一）不可修产品的可靠性指标

不可修产品是指产品失效以后不进行任何维修，或失效以后就废弃的产品。产品失效以后不维修而废弃的原因可能是多种多样的。有的产品技术上不便进行维修，坏了只好将其废弃；有的产品低价易耗，进行维修经济上不合算；还有的产品，仅能使用一次，因此根本不存在维修的问题。不可修产品的主要可靠性指标有：产品的寿命分布与可靠度、平均寿命、失效率等。

1．寿命分布与可靠度

产品从时刻0处于完好状态开始直到进入失效状态所经历的时间称为产品的寿命。易知产品寿命ξ为非负随机变量，其分布函数$F(x)=P(\xi\leqslant x)$称为产品的寿命分布，而产品在时刻t的生存概率$R(t)=P(\xi>t)=1-F(t)$称为该产品的可靠度函数或可靠度。因此，可靠度也可定义为：产品在规定的条件下，在规定的时间内，完成规定功能的概率。其中“规定的条件”通常是指产品使用时的环境条件、贮存条件等等；“规定的时间”通常是指产品需使用的时间；而规定的功能通常是指产品的主要技术性能。

2．失效率

若产品寿命ξ的分布函数为$F(t)$，概率密度$f(t)$存在，则t时刻产品的失效率（或故障率）定义为

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{f(t)}{R(t)},\quad 对\ t\in\{t:F(t)<1\}$$

(3.1)

$\lambda(t)$ 有如下概率含义：若产品正常工作一直到时刻 t，则它在 $(t,\ t+\Delta t]$ 中失效的概率为

$$P(\xi\leqslant t+\Delta t|\xi>t)=\frac{P(t<\xi\leqslant t+\Delta t)}{P(\xi>t)}$$

$$\approx\frac{f(t)\Delta t}{1-F(t)}=\lambda(t)\Delta t$$

因此当 Δt 很小时，$\lambda(t)\Delta t$ 表示该产品在 t 以前正常工作的条件下，在 $(t,\ t+\Delta t]$ 中失效的概率。由于

$$f(t)=\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$$

故由（3.1）式可得

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=-\frac{1}{R(t)}\quad\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}\tag{3.2}$$

如果产品在开始使用时是好的，即 $R(0)=1$，则由（3.2）式可解得

$$R(t)=\exp\left\{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u\right\}\tag{3.3}$$

由（3.2）式与（3.3）式可知，产品可靠度与失效率是一一对应的。

3. 平均寿命

产品寿命 ξ 的期望值 $E(\xi)$ 称为平均寿命。记作 MTTF (Mean Time To Failure)。平均寿命与产品可靠度有关系式

$$E(\xi)=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$$

这是由于

$$E(\xi)=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)=\int_0^\infty\int_0^t\mathrm{d}u\mathrm{d}F(t)$$

$$=\int_0^{\infty}\int_u^{\infty}\mathrm{d}F(t)\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}R(u)\mathrm{d}u$$

（二）可修产品的可靠性指标

可修产品是指产品失效以后，可以进行修理或更换，从而使其恢复原有功能的一类产品。对于可修产品，我们常将产品失效称为故障，显然可修产品的时间历程表现为如图 3-1 所示的正常与故障交替出现的过程。其中ξ_i与y_i分别表示第 i 次工作的工作寿命与第 i 次故障的修复时间。

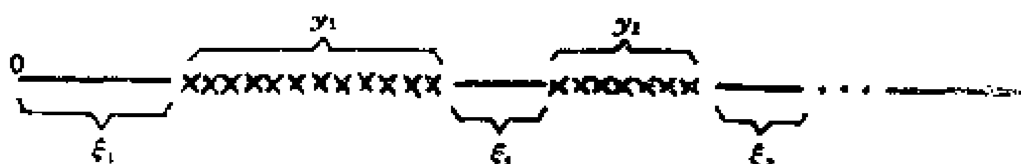


图 3-1

可修产品的主要可靠性指标有瞬时可用度、稳态可用度、首次故障前平均工作时间、可靠度等。

1. 瞬时可用度与稳态可用度

由于可修产品是正常与故障两种状态交替出现的，因此在任何时刻 t，该产品究竟处于哪一种状态是人们关心的。为此引进随机变量$X(t)$，它表示 t 时刻产品的状态，并规定

$$X(t)=\begin{cases}1，\text{若 } t \text{ 时刻产品正常}\\0，\text{若 } t \text{ 时刻产品故障}\end{cases}$$

于是，产品在 t 时刻的瞬时可用度定义为

$$A(t)=P(X(t)=1)=E[X(t)] \qquad (3.4)$$

若极限$A=\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$ 存在，则称A为产品的稳态可用度。

2. 首次故障前平均工作时间与可靠度

注意到在图 3-1 中的ξ_1，ξ_2，…及y_1，y_2…一般来说是不同分布的，因此对于首次故障前工作时间ξ_1应首先予以关注。于是，

若设产品首次故障前工作时间 ξ_1 的分布为$F_1(t)=P(\xi_1\leqslant t)$，则首次故障前平均工作时间（记为MTTFF）定义为

$$\text{MTTFF}=E(\xi_1)=\int_0^{\infty} t\mathrm{d}F_1(t)$$

而产品的可靠度则定义为

$$R(t)=P(\xi_1>t)=1-F_1(t)$$

它表示可修产品在[0, t]时间内正常工作的概率，这与不可修产品可靠度的定义是基本一致的。

可修产品的可靠性指标除上述瞬时可用度、稳态可用度、首次故障前平均工作时间、可靠度以外，还有瞬时故障频度、稳态故障频度、平均故障次数等，它们从不同的角度出发描述了可修产品的故障状态的概率特性。本章对上述指标不作深入探讨，有兴趣的读者可参阅文献[2]。最后要说明一点，上述各种可靠性指标均是针对产品的单故障模式而言。事实上，在实际问题的可靠性分析中，故障状态往往可以不止一种，如机械元件可分为轻微故障和严重故障，开关元件可分为开路故障和短路故障等。有关多故障模式的可靠性指标在此从略。

§3.2 典型不可修系统分析

所谓典型不可修系统是指组成系统的部件失效后并不对其进行维修（如修理、更换等）的系统。本节介绍串联系统、冗余系统、贮备系统、混联系统的可靠性分析。为此先介绍可靠性结构框图的概念。

系统结构图是描述组成系统各单元相互依存关系的一种有力工具。这种相互依存的关系通常有两类：一类称为物理关系，这是人们所熟知的；另一类称为功能关系，也就是每个单元的好坏对系统好坏的影响。所谓系统的可靠性结构框图就属于后者。由于搞清系统和各单元之间的功能关系是研究系统可靠性的先决条

件，因此正确绘制系统可靠性结构框图是重要的。下面我们通过一个例子来说明物理关系与功能关系的区别。

例3.1　在电路中往往设置一些串联开关，从其物理关系来看，其系统结构图如图3-2。然而这些开关在电路中往往有不同的用途。若其功能仅是为了接通电路，则需三个开关均完好时电路才能接通，因此其可靠性结构框图如图3-3；若其功能是为了防止电路切不断，则只需一个开关完好（要它断开时即能瞬时断开），就能切断电路。此时的系统可靠性结构图如图3-4。



图　3-2

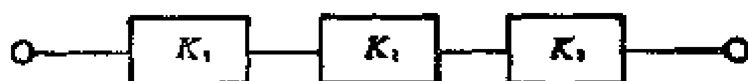


图　3-3

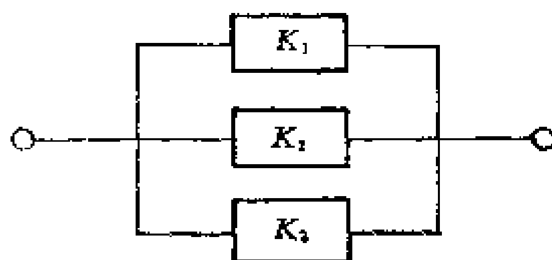


图　3-4

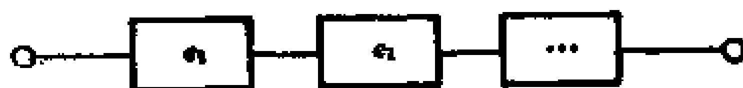


图　3-5

（一）串联系统

所谓串联系统是指系统由 n 个部件组成，而此 n 个部件中的任何一个部件失效均将引起系统失效。串联系统的可靠性结构框图如图3-5。今设第 i 个部件的寿命为 ξ_i，$i=1, 2, \cdots, n$；$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$相互独立；在初始时刻 $t=0$ 所有部件都是新的。

且同时开始工作。以下求该系统的可靠性指标。

由串联系统定义可知，系统寿命 ξ 应等于各部件寿命 ξ_i 的最小者，于是有

$$R(t)=P(\xi>t)=P(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i>t)$$

$$=P(\xi_1>t,\ \xi_2>t,\ \cdots,\ \xi_n>t)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(\xi_i>t)=\prod_{i=1}^{n}R_i(t)$$

其中 $R_i(t)$ 为第 i 个部件的可靠度。

当第 i 个部件的失效率为 $\lambda_i(t)$ 时，则由（3.3）式知系统可靠度为

$$R(t)=\prod_{i=1}^{n}R_i(t)=\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\int_0^t\lambda_i(u)\mathrm{d}u\right\}$$

$$=\exp\left\{-\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u)\mathrm{d}u\right\}$$

系统的失效率为

$$\lambda(t)=-\frac{R'(t)}{R(t)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t) \tag{3.5}$$

系统的平均寿命

$$\mathrm{MTTF}=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty\exp\left\{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t$$

若第 i 个部件寿命 ξ_i 服从参数为 λ_i 的负指数分布时，显然有

$$\begin{cases}R(t)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t\right\}\\ \mathrm{MTTF}=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\end{cases}$$

特别地，当上述各负指数分布的参数相同时，即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时，还有

$$\begin{cases} R(t)=e^{-n\lambda t} \\ \text{MTTF}=\dfrac{1}{n\lambda} \end{cases}$$

上式告诉我们：由 n 个相互独立的相同负指数部件组成的串联系统中，部件数 n，失效率 λ 和工作时间 t 三者对串联系统可靠度的影响相同。因此，为了提高串联系统可靠度，采取减少部件数、降低部件失效率或缩短工作时间这三者中的任何一项措施都是有效的。

（二）冗余系统

为了提高系统的可靠性，人们常在系统上增加一些多余的部件（多余部件除去后，系统仍能工作，但可靠度要下降），这种方法在工程设计中称为冗余法，而得到的系统也称为冗余系统，例如飞机多安装一到二台发动机的原理即在于此。常见的冗余系统有并联系统、表决系统等。

1. 并联系统

所谓并联系统是指系统由 n 个部件组成，只要其中至少有一个部件不失效，系统就能正常工作，我们称这种系统为并联系统。并联系统的可靠性结构框图见图3-6。设并联系统中第 i 个部件

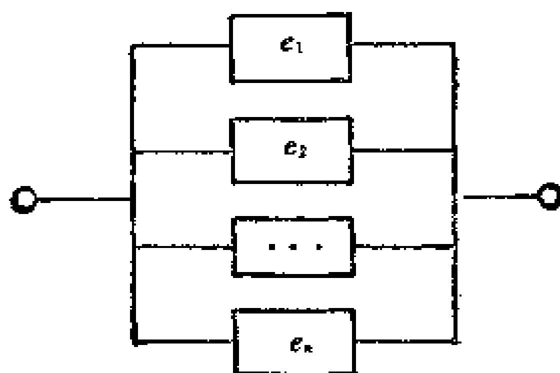


图 3-6

的寿命为ξ_i，$i=1, 2, \cdots, n$，并假定$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$相互独立，且在初始时刻$t=0$系统中$n$个部件都是新的，并同时开始工作。以下求该系统的可靠性指标。

由定义可知，并联系统的寿命ξ应等于各部件寿命ξ_i中的最大者。于是可得

$$
\begin{aligned}
R(t)&=P(\xi>t)=P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i>t)\\
&=1-P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i\leqslant t)\\
&=1-P(\xi_1\leqslant t, \xi_2\leqslant t, \cdots, \xi_n\leqslant t)\\
&=1-\prod_{i=1}^{n}P(\xi_i\leqslant t)\\
&=1-\prod_{i=1}^{n}[1-R_i(t)]
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

若第i个部件寿命ξ_i服从参数为λ_i的负指数分布时，则系统可靠度

$$
\begin{aligned}
R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-e^{-\lambda_i t}]&=\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i t}\\
&-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}\\
&+\cdots\cdots+(-1)^{l-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant n}e^{-(\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+\cdots+\lambda_{j_l})t}\\
&+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}
\end{aligned}
$$

从而可得系统的平均寿命

$$
\begin{aligned}
\text{MTTF}=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t=&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\\
&-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}+\cdots
\end{aligned}
$$

$$+(-1)^{l+1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant n}\frac{1}{\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+\cdots+\lambda_{j_l}}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

特别地，当上述负指数分布的各参数相等时，即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时，系统可靠度为

$$R(t)=1-(1-e^{-\lambda t})^n=[e^{-\lambda t}+(1-e^{-\lambda t})]^n-(1-e^{-\lambda t})^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{n-i}-(1-e^{-\lambda t})^n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{n-i}$$

利用变量置换 $x=1-e^{-\lambda t}$，当 n 较大时可得

$$\text{MTTF}=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty[1-(1-e^{-\lambda t})^n]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(1-x^n)\frac{1}{\lambda(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\lambda}(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$\approx\frac{1}{\lambda}(\ln^n+c)$$

其中最后一个等式是利用Euler公式，其中Euler常数 $c=0.57712\cdots$。由上式可知并联系统的MTTF将随着部件数成自然对数增长。除此之外，并联系统还有许多独特的性质。例如对串联系统来说，当部件失效率为常数时，由（3.5）式知系统失效率也是常数，但并联系统并非如此。以两部件并联系统为例，若两个部件的失效率均为 λ 时，由（3.6）式知系统可靠度

$$R(t)=2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}$$

此时，系统失效率

$$\lambda(t)=-\frac{1}{R(t)}\quad\frac{dR(t)}{dt}=\frac{2\lambda e^{-\lambda t}-2\lambda e^{-2\lambda t}}{2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}}\tag{3.7}$$

上式说明，并联系统的失效率已不再象部件失效率那样是常数，而成为时间 t 的函数了。此外，对于足够小的 t，利用近似等式 $e^{-\lambda t}\approx 1-\lambda t$ 还可以得到

$$\lambda(t)=\frac{2\lambda e^{-\lambda t}-2\lambda e^{-2\lambda t}}{2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}}\approx 2\lambda^2 t$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda-\lambda e^{-\lambda t}}{1-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}}=\lambda$$

上述两式说明，并联系统使用初期，其冗余特性甚为明显，系统失效率是时间 t 的线性函数，即随着时间的增长，其失效可能性将愈来愈大。然而，当系统运行足够大时间后，冗余特性将消失，此时二部件并联系统失效率与单部件失效率相等。

2. 表决系统

系统由 n 个部件组成，仅当 n 个部件中有 k 个或 k 个以上部件正常工作时（$1\leqslant k\leqslant n$），系统才正常工作，或仅当失效部件数大于或等于 $n-k+1$ 时系统方失效，这样的系统称为 n 中取 k 的表决系统，记为 $k/n(G)$。显然串联系统是 $n/n(G)$ 系统，而并联系统则是 $1/n(G)$ 系统。$k/n(G)$ 系统的可靠性系统结构图见图3-7。设 ξ_i 表示第 i 个部件的寿命，ξ_1，ξ_2，…，ξ_n

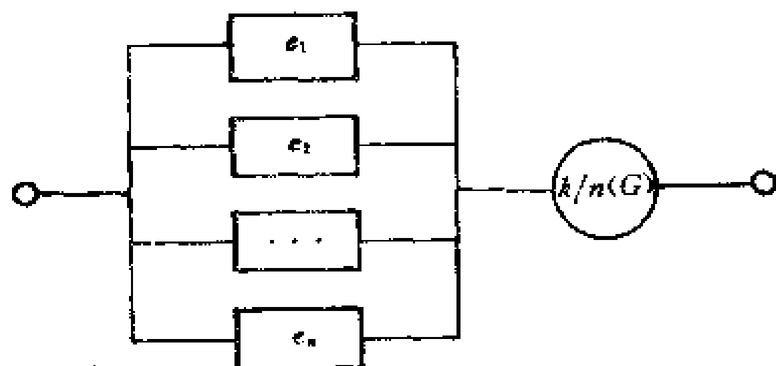


图 3-7

相互独立。并设初始时刻各部件全新且同时开始工作。以下为方便起见，我们仅讨论同型部件的可靠性指标。

设各同型部件的可靠度为 $R_0(t)$，则根据概率论知识及 $k/n(G)$ 系统的二种定义不难求得

$$R(t)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}(1-R_0(t))^{n-i}(R_0(t))^{i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}(R_0(t))^{n-i}(1-R_0(t))^{i} \qquad (3.8)$$

若设 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内失效的部件数，则当 n 充分大时，上式还可由DeMoivre-Laplace定理作近似计算。这是由于

$$R(t)=P(0\leqslant N(t)\leqslant n-k)$$

$$=P\left(\frac{0-n(1-R_0(t))}{\sqrt{nR_0(t)(1-R_0(t))}}\leqslant\frac{N(t)-n(1-R_0(t))}{\sqrt{nR_0(t)(1-R_0(t))}}\leqslant\frac{n-k-n(1-R_0(t))}{\sqrt{nR_0(t)(1-R_0(t))}}\right)$$

$$\approx\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (3.9)$$

其中

$$a(t)=-\frac{n(1-R_0(t))}{\sqrt{nR_0(t)(1-R_0(t))}},$$

$$b(t)=\frac{n-k-n(1-R_0(t))}{\sqrt{nR_0(t)(1-R_0(t))}}$$

于是，利用Laplace函数表即可由（3.9）式计算得到系统可靠度 $R(t)$。

若各部件均服从参数为 λ 的负指数分布时，由（3.8）式知有

$$R(t)=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}e^{-\lambda(n-i)t}(1-e^{-\lambda t})^{i}$$

将上式积分，并作变量置换 $x=1-e^{-\lambda t}$ 有

$$\mathrm{MTTF}=\int_0^{\infty}R(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\int_0^{\infty}e^{-\lambda(n-i)t}(1-e^{-\lambda t})^{i}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\frac{1}{\lambda}\int_0^{1}(1-x)^{n-i-1}x^{i}\mathrm{d}x$$

当 k 较大时，则有

$$\mathrm{MTTF}=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\frac{1}{\lambda}B(n-i,\ i+1)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{n-i}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}\right]$$

$$\approx\frac{1}{\lambda}[\ln n+c-\ln(k-1)-c]$$

$$=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{n}{k-1}\right)\qquad(3.10)$$

注意到 $1/\lambda$ 即为部件的平均寿命，故（3.10）式说明当 k 较大时由 n 个部件组成的 k/n（G）系统的 MTTF 是单部件系统的 MTTF的 $\ln\left(\frac{n}{k-1}\right)$ 倍。

（三）贮备系统

为了提高系统的可靠度，除了多安装一些部件外，还可贮备一些部件，以便当工作部件失效时可立即由贮备部件来顶替，这

种系统称为贮备系统。贮备系统与冗余系统的主要区别是前者待机工作，后者同机工作。贮备系统又分为冷贮备系统与温贮备系统两种，前者贮备部件在贮备期间性能不变坏，因而贮备期的长短对以后使用时的工作寿命没有影响，而后者贮备部件在贮备期间性能要变坏。此外，当工作部件失效，贮备部件需立即转换为工作状态时，需要做转接工作，这种转接工作可以用人工进行，也可采用开关转接，于是又可分为开关完全可靠与开关不完全可靠等不同形式。

1．开关完全可靠的冷贮备系统

设系统具有如下特性：（1）系统由 n 个部件组成，在初始时刻，一个部件开始工作，其余 $n-1$ 个部件作冷贮备。当工作部件失效时，贮备部件逐一地去替换，直到所有部件都失效时，系统才失效。（2）贮备部件替换失效部件的工作由转换开关来完成，转换开关是完全可靠的，且转换是瞬时完成的。（3）n 个部件的寿命设为 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n，它们相互独立，且分别服从参数为 λ_1，λ_2，…，λ_n 的负指数分布（$\lambda_i>0$，$i=1$，2，…，n）。该系统的可靠性结构图见图3-8。以下求该系统的可靠性指标。

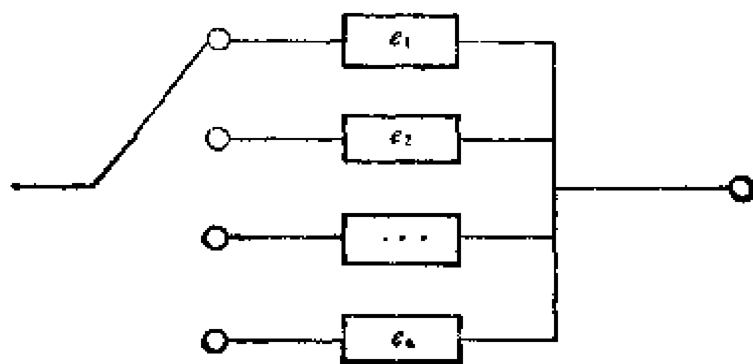


图 3-8

由上述系统特性，易知系统寿命 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$。若设 ξ 与 ξ_i 的分布密度分别为 $f(t)$ 与 $f_i(t)$ $i=1$，2，…，n，则应有

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t) \tag{3.11}$$

记

$$f^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t,\quad f_i^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}f_i(t)\mathrm{d}t,\quad s\geqslant 0$$

对（3.11）式两端作 L 变换有

$$f^*(s)=\prod_{i=1}^{n} f_i^*(s)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i},\quad s\geqslant 0 \tag{3.12}$$

其中

$$c_i=\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_i},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

要证明（3.12)式的最后一个等式，只需在该等式的两端同乘 $s+\lambda_j$，可得到

$$\lambda_j\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}=(s+\lambda_j)\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i\lambda_i}{s+\lambda_i}$$

将 $s=-\lambda_j$ 代入上式两端，可得

$$\lambda_j\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_j}=c_j\lambda_j$$

由于上式对所有 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 都成立，故证得(3.12)式。

对（3.12）式两端作 L 反演，并注意到 $L^{-1}\left[\frac{1}{s+\lambda_i}\right]=e^{-\lambda_i t}$，可得

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

或有

$$F(t)=\int_0^t f(u)\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^{n} c_i(1-e^{-\lambda_i t})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_i-\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t}$$

注意到$F(\infty)=1$，代入上式可得$\sum_{i=1}^{n} c_i=1$。故最后求得

$$R(t)=1-F(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_i}\right]e^{-\lambda_i t}$$

$$\mathrm{MTTF}=E(\xi_1+\xi_2+\cdots\cdots+\xi_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}$$

特别当$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$时，由附录二定理7.7知$n$个相互独立且有相同负指数分布的随机变量之和服从$n$阶Erlang分布。于是立即可得

$$R(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

$$\mathrm{MTTF}=\frac{n}{\lambda}$$

2 开关不完全可靠的温贮备系统

为简单起见，以下讨论开关不完全可靠的二部件温贮备系统。该系统具有如下特性：（1）系统由甲、乙两部件和一个开关组成，运行的初始时刻，甲部件工作，乙部件温贮备。当工作部件失效时，贮备部件通过开关转换成工作状态。（2）部件甲、乙的工作寿命ξ_1，ξ_2分别服从参数为$\lambda_1>0$与$\lambda_2>0$的负指数分布，而贮备寿命η均服从参数为$\mu>0$的负指数分布。（3）设K表示使用转换开关时开关的状态，并令

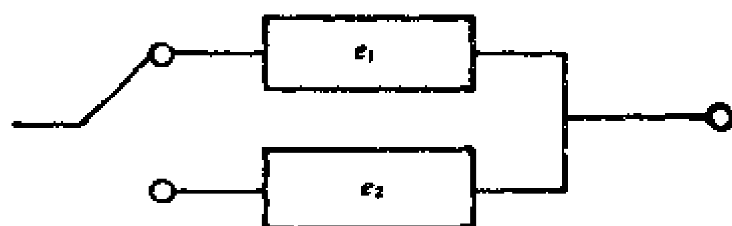


图 3-9

$$K=\begin{cases}1 & \text{使用开关时，开关完好}\\ 0 & \text{使用开关时，开关失效}\end{cases}$$

有$P(K=1)=p$，$P(K=0)=q$，$p+q=1$。并设开关的转换是瞬时的，当贮备部件由贮备状态转入工作状态后，其工作寿命与其曾贮备了多长时间无关。（4）所有部件的寿命(包括工作寿命与贮备寿命）均相互独立。该系统的系统可靠性结构图见图3-9。以下求该系统的可靠性指标。

考虑到系统的失效显然是由如下三种情况所造成：（a）部件甲工作期间，贮备部件乙失效，随后部件甲失效。此时有$\xi_1>\eta$，且系统寿命$\xi=\xi_1$；（b）部件甲失效时，部件乙虽完好，但使用开关时开关失效，此时有$\xi_1<\eta$，$K=0$，系统寿命$\xi=\xi_1$；（c）部件甲失效时，部件乙完好，使用开关转换时开关亦完好，随后，部件乙才失效，此时有$\xi_1<\eta$，$K=1$，系统寿命$\xi=\xi_1+\xi_2$。利用ξ_1，ξ_2，η，K的相互独立性，有

$$\begin{aligned}P(\xi\leqslant t)=&P(\xi\leqslant t,\ \xi_1>\eta,\ \xi=\xi_1)\\&+P(\xi\leqslant t,\ \xi_1<\eta,\ K=0,\ \xi=\xi_1)\\&+P(\xi\leqslant t,\ \xi_1<\eta,\ K=1,\ \xi\\&=\xi_1+\xi_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=P(\xi_1\leqslant t,\ \xi_1>\eta)+qP(\xi_1\leqslant t,\ \xi_1<\eta)\\&\quad+pP(\xi_1+\xi_2\leqslant t,\ \xi_1<\eta)\\&=\int_0^t P(\eta<y)\mathrm{d}P(\xi_1\leqslant y)+q\int_0^t P(\eta>y)\\&\quad\cdot\mathrm{d}P(\xi_1\leqslant y)+p\int_0^t P(\xi_2\leqslant t-y)\cdot P(\eta>y)\end{aligned}$$

$$\cdot dP(\xi_1 \leqslant y) = \int_0^t (1-e^{-\mu y})\, d(1-e^{-\lambda_1 y})$$

$$+ q\int_0^t e^{-\mu y}\, d(1-e^{-\lambda_1 y})$$

$$+ p\int_0^t [1-e^{-\lambda_2(t-y)}]e^{-\mu y}\, d(1-e^{-\lambda_1 y})$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 t} - p\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu-\lambda_2}[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\mu+\lambda_1)t}]$$

从而有

$$R(t) = e^{-\lambda_1 t} + p\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu-\lambda_2}[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\mu+\lambda_1)t}]$$

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} R(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_1} + p\frac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1+\mu)}$$

（四）混联系统

一个实际的工程系统，为了提高系统的可靠性，往往采用串联、冗余、贮备的混合结构形式。如不考虑贮备，则这种具有串联，冗余混合结构形式的系统称为混联系统。混联系统最常见的是串并联系统和并串联系统，其系统可靠性结构图见图3-10与图3-11。

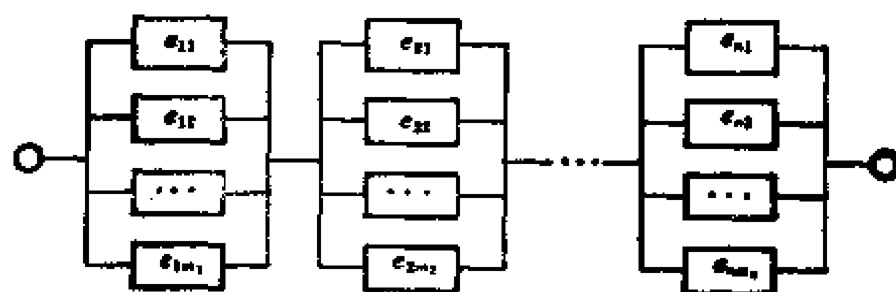


图 3-10

1. 串并联系统

设系统由相互独立工作的 n 级子系统串联构成。其中第 i 级

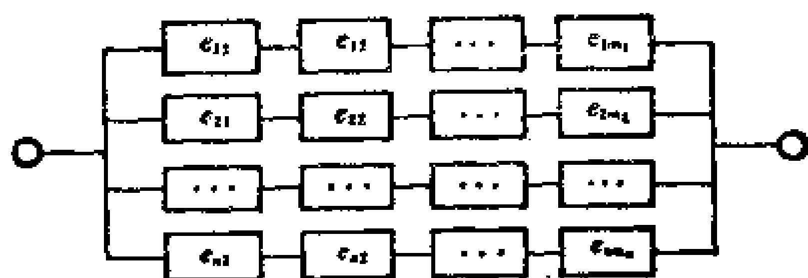


图 3-11

子系统由相互独立工作的m_i个同型部件并联组成，其部件可靠度为$R_i(t)$，$i=1，2，\cdots，n$。

利用并联系统的计算公式，可得第i级子系统的可靠度$R_{子}^{i}(t)=1-[1-R_i(t)]^{m_i}$，$i=1，2，\cdots，n$。再利用串联系统计算公式，可得串并联系统可靠度

$$R_{串并}(t)=\prod_{i=1}^{n}R_{子}^{i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\{1-[1-R_i(t)]^{m_i}\} \tag{3.13}$$

2、并串联系统

设系统由相互独立工作的n级子系统并联构成。其中第i级子系统又由相互独立工作的m_i个同型部件串联组成，其部件可靠度为$R_i(t)$，$i=1，2，\cdots，n$。

类似于上述求解方法，可得并串联系统可靠度为

$$R_{并串}(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-(R_i(t))^{m_i}] \tag{3.14}$$

3. 部件冗余与系统冗余的比较

串并联系统事实上是一个部件冗余系统，而并串联系统则是一个子系统冗余系统。那么在可靠性设计中，究竟哪种冗余形式的可靠度高呢？我们以图3-12的串并联系统与图3-13的并串联系统来作一个比较，设这两个系统所采用的部件个数及其型号均相同。

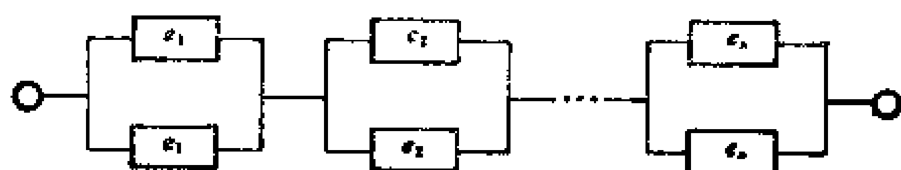


图 3-12

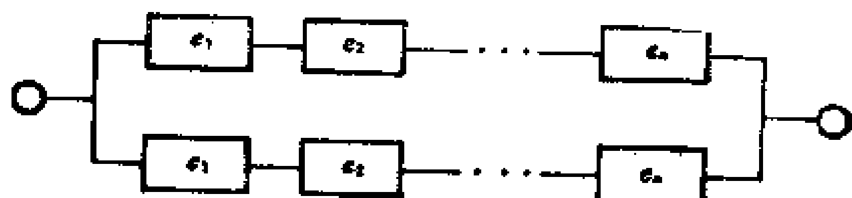


图 3-13

由图3-12与图3-13可知

$$R_{串并}(t)=\prod_{i=1}^{n}[1-(1-R_i(t))^2]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}[1-F_i^2(t)]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}[1-F_i(t)]\prod_{i=1}^{n}[1+F_i(t)]$$

$$R_{并串}(t)=1-\left[1-\prod_{i=1}^{n}R_i(t)\right]^2$$

$$=\prod_{i=1}^{n}R_i(t)\left[2-\prod_{i=1}^{n}R_i(t)\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}[1-F_i(t)]$$

$$\cdot\left\{2-\prod_{i=1}^{n}[1-F_i(t)]\right\}$$

注意到

$$\prod_{i=1}^{n}[1+F_i(t)] = 1 + \sum_{i=1}^{n} F_i(t)$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} F_i(t)F_j(t) + \cdots + \prod_{i=1}^{n} F_i(t)$$

$$\prod_{i=1}^{n}[1-F_i(t)] = 1 - \sum_{i=1}^{n} F_i(t)$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} F_i(t)F_j(t) + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^n \prod_{i=1}^{n} F_i(t)$$

故有

$$\prod_{i=1}^{n}[1+F_i(t)] - 2 + \prod_{i=1}^{n}[1-F_i(t)] > 0$$

所以有
$$R_{串并}(t) - R_{并串}(t) > 0$$

亦即说明部件冗余优于子系统冗余。

§3.3　马氏可修系统分析

一个可修系统，通常由若干个部件、一台或多台修理设备（或修理工）组成。修理设备的任务是对发生故障的部件进行修理，使其修复后能继续正常工作。对于一个可修系统来说，其主要可靠性指标有：系统可靠度 $R(t)$、系统首次故障前的平均工作时间 MTTFF、系统瞬时可用度 $A(t)$ 与稳态可用度 A、系统瞬时故障频度 $m(t)$ 与稳态故障频度 M、系统平均开工时间 MUT、平均停工时间MDT与平均周期MCT 等。不同的可修系统，由于其结构的不同以及部件寿命与故障后修复时间的概率特性的不同，其各种可靠性指标的求解方法一般是不同的。但在我们研

究的各种可靠性系统中有这样一类系统，当构成该系统的各部件寿命、故障后修复时间以及其他有关变量均服从负指数分布时，只要适当定义系统的状态，该系统的状态变化总可用 Markov 过程来描述，因此，这种系统就称为马氏可修系统。由于马氏过程有很多好的性质，它可用来作为求解各种可靠性指标的有力工具，因此马氏可修系统是目前可靠性应用中广泛采用的模式之一。本节介绍马氏可修系统的一般模型、特殊模型及其可靠性指标的求解方法。

(一)马氏可修系统的一般模型

所谓一般模型是指该系统满足如下特性：(1)设系统有$N+1$个状态，或有状态空间$I=\{0,1,2,\cdots,N\}$，$I=W\cup F$，其中$W=\{0,1,2,\cdots,k\}$为系统的工作状态集，$F=\{k+1,k+2,\cdots,N\}$为系统的故障状态集。(2)设$X(t)$表示t时刻该系统的状态，则$\{X(t),t\geqslant 0\}$为连续时间的不可约齐次马氏过程，并有$N+1$阶转移密度矩阵

$$Q=(q_{ij})$$

以下来求解上述一般模型的主要可靠性指标。

1. 系统的瞬时可用度与稳态可用度

定理3.1 设$P_j(t)=P(X(t)=j)$，$j\in I$，$P(t)=(P_0(t),P_1(t),\cdots P_n(t))$，则在模型的假设下，系统的瞬时可用度$A(t)$及其$L$变换$A^*(s)$有

$$A(t)=\sum_{j\in W}P_j(t)=P(t)\tilde{e}^T$$

$$A^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A(t)\mathrm{d}t=\sum_{j\in W}P_j^*(s)=P^*(s)\tilde{e}^T \tag{3.15}$$

其中

$$P^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}P(t)\mathrm{d}t=P(0)(sI-Q)^{-1},\quad s>0$$

$$\tilde{e}=(\underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{k+1\text{个}},\ \underbrace{0,\ 0,\ \cdots,\ 0}_{N-k\text{个}})$$

其中 I 为 $N+1$ 阶单位阵。系统的稳态可用度

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0}\ sA^*(s)=\sum_{j\in W}P_j$$

其中 $P_j=\lim_{t\to\infty}P_j(t)$。

证明 由瞬时可用度定义及系统特性易知有 $A(t)=\sum_{j\in W}P_j(t)=P(t)\tilde{e}^T$。设 $P(t)=(P_0(t),\ P_1(t),\ \cdots,\ P_N(t))$，则 $P(t)$ 必满足K－F向前方程，

$$P'(t)=P(t)Q$$

对上式两端作 L 变换（对向量作 L 变换是指对每一个分量作 L 变换），有

$$\int_0^\infty e^{-st}P'(t)\mathrm{d}t=e^{-st}P(t)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty se^{-st}P(t)\mathrm{d}t$$

$$=-P(0)+sP^*(s)=P^*(s)Q$$

从而有

$$P^*(s)=P(0)(sI-Q)^{-1},\qquad s>0$$

此外，由于 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 为不可约有限状态齐次马氏过程，故其平稳分布存在，且等于其极限分布，即有 $\lim_{t\to\infty}P_j(t)=P_j>0$，$\sum_{j\in I}P_j=1$。再注意到 W 为有限集，故极限

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{j\in W}P_j(t)=\sum_{j\in W}P_j$$存在，因而可用 L 变换性质得

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0}sA^*(s)=\sum_{j\in W}P_j \qquad \square$$

当给定一个具体的马氏可修系统后，可以根据给定的初始条件及密度矩阵Q由（3.15）式来计算$A^*(s)$，然后再作L反变换得到$A(t)$，最后取极限得到$A=\lim\limits_{s\to 0}sA^*(s)$。然而在有些情况下，不通过$A^*(s)$而直接利用求出的$P_j$来计算$A$可能更为简单。此时为求出$P_j$，可采用类似于排队论中常用的求解方法，即通过该马氏过程的状态转移密度图及概率守恒原理或直接应用生灭过程法来求出稳态概率分布$\{P_j,\ j\in I\}$，由此即可得到$A=\sum\limits_{j\in W}P_j$。

2. 系统可靠度

定理3.2 在本模型中，当给出马氏过程$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$的状态转移密度矩阵

$$Q=(q_{ij})=\begin{pmatrix}H & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

及初始分布$P(0)=(P_W(0),\ P_F(0))$后，系统可靠度的L变换$R^*(s)$有

$$R^*(s)=P_W(0)(sI-H)^{-1}e_W^T$$

其中H为Q的前$k+1$行、前$k+1$列的元素构成的矩阵，$e_W=(\underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{k+1\text{个}})$，$P_W(0)=(P_0(0),\ P_1(0),\cdots,\ P_k(0))$

证明 为了求解系统可靠度$R(t)=P(\xi>t)$，其中ξ表示系统首次故障前工作时间，需要建立事件$\xi>t$与事件$X(t)=j$的联系。仿照排队论中处理忙期长度分布的思想，我们在原过程$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$的基础上建立一个新过程$\{\tilde{X}(t),\ t\geqslant 0\}$，使原过程的故障状态均成为吸收态，而工作状态及其

概率特性仍保持不变，亦即原过程的转移密度矩阵为

$$Q=(q_{ij})=\begin{pmatrix}H & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

的话，则新过程的转移密度应有

$$\tilde{q}_{ij}=\begin{cases}q_{ij} & i\in W,\ j\in I\\ 0 & i\in F,\ j\in I\end{cases}$$

或有

$$\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})=\begin{pmatrix}H & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此新过程仍为有限状态齐次马氏过程。图 3-14 与图 3-15 分別

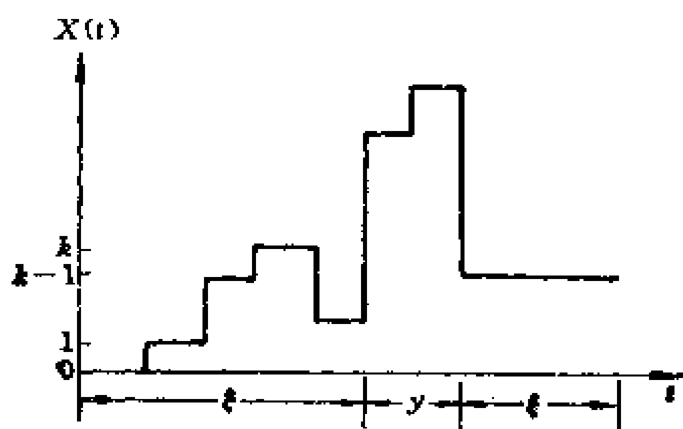


图 3-14

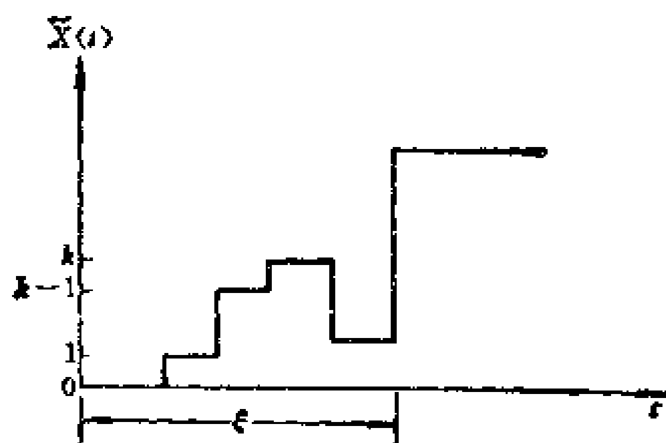


图 3-15

画出了原过程与新过程的一条样本函数曲线。若令$\widetilde{p}_j(t)=P(\widetilde{X}(t)=j)$，则由图 3-15 知有

$$P(\xi>t)=P(\widetilde{X}(t)\in W)=\sum_{j\in W}\widetilde{p}_j(t)$$

以下来推导$\widetilde{p}_j(t)$所满足的微分方程。注意到$\widetilde{p}_j(t)$应满足K-F向前方程$\widetilde{p}'(t)=\widetilde{p}(t)\widetilde{Q}$，写成分块矩阵的形式为

$$(\widetilde{p}'_W(t),\ \widetilde{p}'_F(t))=(\widetilde{p}_W(t),\ \widetilde{p}_F(t))\begin{pmatrix}H & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

或有

$$\begin{cases}\widetilde{p}'_W(t)=\widetilde{p}_W(t)H\\ \widetilde{p}'_F(t)=\widetilde{p}_W(t)B\end{cases}\tag{3.16}$$

由（3.16）式作L变换，并求解可得

$$\widetilde{p}^*_W(s)=\widetilde{p}_W(0)(sI-H)^{-1},\quad s>0\tag{3.17}$$

因为系统可靠度

$$R(t)=\sum_{j\in W}\widetilde{p}_j(t)=\widetilde{p}_W(t)e^T_W$$

所以，对上式作L变换并以（3.17）式代入即可得

$$\begin{aligned}R^*(s)&=\widetilde{p}^*_W(s)e^T_W=\widetilde{p}_W(0)(sI-H)^{-1}e^T_W\\&=P_W(0)(sI-H)^{-1}e^T_W\end{aligned}\qquad\Box\tag{3.18}$$

3. 系统首次故障前平均工作时间

利用已求得的系统可靠度$R(t)$或其L变换$R^*(s)$，容易得到系统首次故障前平均工作时间

$$\mathrm{MTTFF}=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t=R^*(0)\tag{3.19}$$

但在有些情况下，特别是系统状态较多时，下述方法可能比直接解（3.16）式方程或利用（3.18）计算$R^*(s)$来得到MTTFF更为简便。

定理3.3 当给定系统的转移密度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

及初始状态分布$P(0)=(P_W(0),\ P_F(0))$时，则有

$$\text{MTTFF}=\sum_{j=0}^{k} x_j$$

其中x_0，x_1，…，x_k满足线性方程组

$$(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k)H=-P_W(0)$$

证明 由（3.18）式与（3.19）式，得

$$\text{MTTFF}=R^*(0)=-P_W(0)H^{-1}e_W^T$$

注意到$P_W(0)H^{-1}$是有$k+1$个分量的行向量，故可令

$$(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k)=-P_W(0)H^{-1}$$

从而有

$$\text{MTTFF}=-P_W(0)H^{-1}e_W^T=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k)e_W^T$$

$$=\sum_{j=0}^{k} x_j \qquad \square$$

4. 求解系统可靠性指标的一般步骤

总结前述结果，可得求解马氏可修系统中可靠性指标的一般步骤如下：

（1）针对具体系统，确定该系统的各项特性。它包括系统结构、构成系统的部件数及修理设备数、各部件处于工作状态的寿命分布、处于贮备状态的寿命分布、发生故障后的修理时间分布及其参数，以及各部件工作、贮备、修理的相互独立性等等。

（2）定义系统的状态及描述该状态变化的随机过程$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$，设该过程的状态空间$I=\{0,1,2,\cdots,N\}$；区分其工作状态集W与失效状态集F，使$W\cup F=I$，不妨设$W=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$，$F=\{k+1,\ k+2,\ \cdots,\ N\}$。证明该过程为连续时间齐次马氏过程。

（3）利用系统特性，计算过程$\{X(t), t\geq 0\}$的状态转移密度矩阵$Q=(q_{ij})$，使有

$$P_{ij}(\Delta t)=q_{ij}\Delta t+o(\Delta t) \quad i\neq j, \ i, \ j\in I$$

$$\sum_{j\in I} q_{ij}=0, \quad i\in I$$

（4）设$P_j(t)=P(X(t)=j)$，$j\in I$。利用K-F向前方程列出微分方程组与初始分布

$$(P_0'(t), P_1'(t), \cdots, P_N'(t))$$
$$=(P_0(t), P_1(t), \cdots, P_N(t))Q$$
$$P(0)=(P_0(0), P_1(0), \cdots, P_N(0))$$

为求解上述方程组，可首先对上述方程组作L变换，将微分方程组化为线性代数方程组，然后再解此线性代数方程组得出$P^*(s)=(P_0^*(s), P_1^*(s), \cdots, P_N^*(s))$，最后对$P^*(s)$再作$L$反演即可得

$$P(t)=(P_0(t), P_1(t), \cdots, P_N(t))$$

（5）求系统瞬时可用度与稳态可用度

$$A(t)=\sum_{j\in W} P_j(t)$$

$$A=\lim_{t\to\infty} A(t)=\lim_{s\to 0} sA^*(s)$$

（6）为求系统可靠度，只需解方程组

$$\begin{cases} (\widetilde{P}_0'(t), \widetilde{P}_1'(t), \cdots, \widetilde{P}_k'(t)) \\ =(\widetilde{P}_0(t), \widetilde{P}_1(t), \cdots, \widetilde{P}_k(t))H \\ \widetilde{P}(0)=(P_0(0), P_1(0), \cdots, P_k(0)) \end{cases}$$

其中H是Q矩阵的左上角$k+1$行，$k+1$列子矩阵。于是，系统可靠度和首次故障前平均工作时间为

$$R(t)=\sum_{j\in W} \widetilde{P}_j(t)$$

$$\text{MTTFF}=\int_0^{\infty} R(t)dt=\lim_{s\to 0} R^*(s)$$

在求系统的瞬时可靠性指标时，由上可知需要求解微分方程组，当系统的状态较多时，求解微分方程组的工作是十分麻烦的。如果此时根据实际问题，只需得到系统的稳态可靠性指标的话，则计算要简单得多。只要在步骤（1）、（2）、（3）后按如下步骤做即可：

（4）画出系统的状态转移密度图，证明其所有状态互通，从而得知随机过程$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$为不可约有限状态齐次马氏过程，因而极限 $\lim_{t\to\infty} P(X(t)=j)=\lim_{t\to\infty} P_j(t)=P_j$ 存在，且构成概率分布 $\sum_{j\in I} P_j=1$。于是可利用状态转移密度图及概率守恒原理列出线性方程组并求解

$$\begin{cases}(P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_N)Q=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\ \sum_{j\in I} P_j=1\end{cases}$$

（5）利用求解出的 P_j 可得系统稳态可用度

$$A=\sum_{j\in W} P_j$$

（6）系统的首次故障前平均工作时间由（3.18）式可得

$$\text{MTTFF}=R^*(0)=-(P_0(0),\ P_1(0),\ \cdots,\ P_k(0))H^{-1}e_W^T$$

（二）串联可修系统

设系统具有如下特性：（1）系统由 n 个部件串联组成，系统的第 j 个部件寿命 ξ_j 服从参数为 $\lambda_j>0$ 的负指数分布，$j=1$，2，…，n。（2）系统有一个修理设备，当某个部件发生故障时，修理设备即对故障部件进行修理，此时其他部件停止工作，

直到故障部件修复后，方再进入工作状态。(3) 第 j 个部件发生故障后的修复时间 y_j 服从参数为 $\mu_j>0$ 的负指数分布，$j=1$，2，…，n。并设修复后的部件与新的一样。(4) 各部件的工作与修理均相互独立。(5) 系统开始时处于工作状态。

为计算上述系统的可靠性指标，我们定义如下随机过程 $\{X(t),\ t\geq 0\}$。其中

$$X(t)=\begin{cases}0, & \text{若 } t \text{ 时刻，系统的 } n \text{ 个部件均正常工作}\\ j, & \text{若 } t \text{ 时刻，系统的第 } j \text{ 个部件发生故障，}\\ & \text{其余部件正常}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

容易证明 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ 为有限状态齐次马氏过程，并有状态空间 $I=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，工作状态集 $W=\{0\}$，失效状态集 $F=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，$I=W\cup F$。根据系统特性，容易求得过程 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ 的状态转移密度图如图 3-16，并有转移密度矩阵

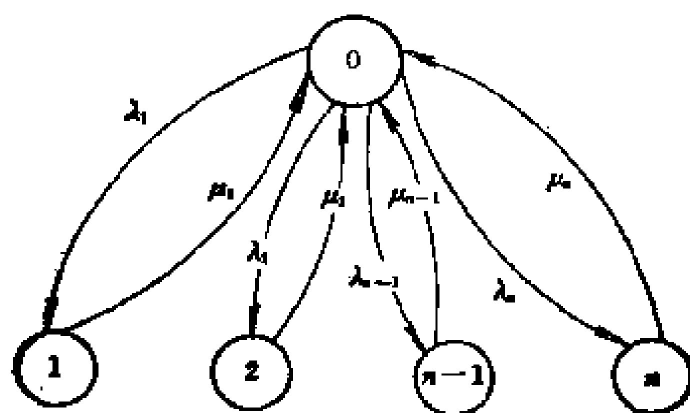


图 3-16

$$Q=\begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{n}\lambda_j & \lambda_1 & \lambda_2\cdots\cdots\lambda_n \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0\cdots\cdots 0 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \mu_n & 0 & 0\cdots\cdots-\mu_n \end{pmatrix}$$

由此可知所有状态互通，因而该过程为不可约。

1. 瞬时可用度

考虑到在计算 $A(t)$ 时若利用（3.15）式，则要计算 $sI-Q$ 的逆矩阵，计算比较麻烦，故以下采用直接求解 $P_0(t)$ 的方法。注意到过程 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 为有限状态齐次马氏过程，故其K-F向前方程存在，并由系统特性（5）知有

$$\begin{cases}(P_0'(t),P_1'(t),\cdots,P_n'(t))=(P_0(t), \\ \qquad P_1(t),\cdots,P_n(t))Q & (3.20)\\ (P_0(0),\ P_1(0),\ \cdots,\ P_n(0)) \\ \qquad =(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0) & (3.21)\end{cases}$$

对（3.20）式两端作 L 变换，并用初始条件（3.21）代入，有

$$\begin{cases}sP_0^*(s)-1=-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jP_0^*(s)+\sum_{i=1}^{n}\mu_iP_i^*(s)\\ sP_i^*(s)=\lambda_iP_0^*(s)-\mu_iP_i^*(s),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{cases}$$

解此方程组，可得

$$P_i^*(s)=\frac{\lambda_i}{s+\mu_i}P_0^*(s),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$P_0^*(s)=\frac{1}{s+s\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{s+\mu_i}}$$

由于瞬时可用度 $A(t)=P_0(t)$，故以下讨论 $P_0^*(s)$ 的 L 反演问题。为此对下式以 $\prod_{l=1}^{n}(s+\mu_l)$ 同乘分子分母有

$$P_0^*(s)=\frac{1}{s\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{s+\mu_i}\right]}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{n}(s+\mu_l)}{s\left[\prod_{l=1}^{n}(s+\mu_l)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{l\neq i}(s+\mu_l)\right]}$$

令

$$H(s)=\prod_{l=1}^{n}(s+\mu_l)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{l\neq i}(s+\mu_l)$$

显然$H(s)$是s的n次多项式，不妨设

$$0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\infty$$

则易知有

$$H(-\mu_l)=\begin{cases}>0, & l\text{为奇数}\\ <0, & l\text{为偶数}\end{cases}$$

且$H(-\mu_n)$与$H(-\infty)$也异号．因此由Rolle定理知$H(s)$在$(-\infty, -\mu_1)$内有n个负实根s_1，s_2，…，s_n，并有

$$-\infty<s_n<-\mu_n<s_{n-1}<-\mu_{n-1}<\cdots<-\mu_2<s_1<-\mu_1<0$$

从而可写成$H(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)$，因此有如下部分分式

$$P_s^*(s)=\frac{\prod_{l=1}^{n}(s+\mu_l)}{s\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}=\frac{\widetilde{A}}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\widetilde{B}_i}{s-s_i} \quad (3.22)$$

其中$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}_i$，$i=1$，2，…，n为待定系数。

对（3.22）式两端同乘s，并令$s\to 0$，易得

$$\widetilde{A}=\prod_{l=1}^{n}\mu_l\bigg/\prod_{i=1}^{n}(-s_i)=\prod_{l=1}^{n}\mu_l/H(0)$$

$$=\frac{\prod_{l=1}^{n}\mu_l}{\prod_{l=1}^{n}\mu_l+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{l\neq i}\mu_l}=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i/\mu_i}$$

对（3.22）式两端同乘 $s-s_i$，并令 $s=s_i$，可得

$$\widetilde{B}_i=\frac{\prod_{l=1}^{n}(s_i+\mu_l)}{s_i\prod_{j\neq i}(s_i-s_j)},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

将 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}_i$ 代入（3.22）式可得

$$P_0^*(s)=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i/\mu_i}\ \frac{1}{s}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{l=1}^{n}(s_i+\mu_l)}{s_i\prod_{j\neq i}(s_i-s_j)}\ \frac{1}{s-s_i}$$

对上式作 L 反演得

$$P_0(t)=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{l=1}^{n}(s_i+\mu_l)}{s_i\prod_{j\neq i}(s_i-s_j)}e^{s_it}$$

其中 s_i（$i=1$，2，…，n）可通过数值计算方法求得（如对分法等）。

2. 稳态可用度

由图 3-16 及概率守恒原理可得

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n)P_0=\mu_1P_1+\mu_2P_2+\cdots+\mu_nP_n\\ \mu_iP_i=\lambda_iP_0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ \sum\limits_{i=0}^{n}P_i=1\end{cases}$$

求解可得

$$\begin{cases}P_i=\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}P_0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ P_0=\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}}\end{cases}$$

$$A=P_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}}$$

3. 系统可靠度与首次故障前平均工作时间

由（3.16）式知，为求系统可靠度只需解方程

$$\begin{cases}\widetilde{P}_0'(t)=-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\widetilde{P}_0(t)\\ \widetilde{P}_0(0)=1\end{cases}$$

从而可得

$$\widetilde{P}_0(t)=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_it\right)$$

因此有

$$R(t)=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_it\right)$$

$$\text{MTTFF}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

（三）二部件并联可修系统

设系统有如下特性：（1）系统由两个相同部件并联而成，每个部件的寿命ξ均服从参数为λ（>0）的负指数分布.（2）系统有一台修理设备，当某一部件发生故障时，该修理设备即对此故障部件进行修理，修理时间y服从参数为μ（>0）的负指数分布，修复后的部件其性能与新部件一样.（3）由于只有一台修理设备，它每次只能修理一个故障部件，故当修理设备正在修理某一故障部件时，若另一工作部件亦发生故障，此时只有等待修理，直到前一故障部件修复后方能得到修理.（4）各部件的修理与工作均相互独立.（5）系统运行的初始时刻，两部件均处于正常工作状态.

为计算上述模型的可靠性指标，我们定义随机过程$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$，其中$X(t)$表示t时刻已发生故障的部件数．容易得知$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$为有限状态齐次马氏过程，有状态空间$I=\{0,\ 1,\ 2\}$．考虑到该系统是并联系统，故系统的工作状态集$W=\{0,\ 1\}$，失效状态集$F=\{2\}$，$I=W\cup F$．此外，根据上述系统特性，容易得到过程的转移密度图3-17及转移密度矩阵

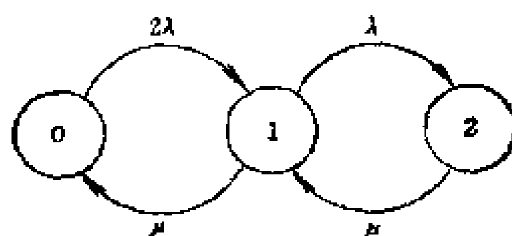


图 3-17

$$Q=\begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

设 $P_j(t)=P(X(t)=j)$，$P(t)=(P_0(t),P_1(t),P_2(t))$，于是$P(t)$ 应满足K-F向前方程 $P'(t)=P(t)Q$，将其展开可得

$$\begin{cases} P_0'(t)=-2\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \\ P_1'(t)=2\lambda P_0(t)-(\lambda+\mu)P_1(t)+\mu P_2(t) \\ P_2'(t)=\lambda P_1(t)-\mu P_2(t) \end{cases} \tag{3.23}$$

由题设还有初始条件

$$P_0(0)=1,\quad P_1(0)=P_2(0)=0$$

对 (3.23) 式两边作L变换并利用初始条件可得

$$\begin{aligned} P_0^*(s)&=\frac{s^2+(\lambda+2\mu)s+\mu^2}{s(s-\alpha)(s-\beta)} \\ P_1^*(s)&=\frac{2\lambda(s+\mu)}{s(s-\alpha)(s-\beta)} \\ P_2^*(s)&=\frac{2\lambda}{s(s-\alpha)(s-\beta)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中α与β是方程

$$s^2+(3\lambda+2\mu)s+(2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2)=0$$

的二个负实根。

利用待定系数法将 (3.24) 中三个有理分式分别化为部分分式，并作L反演，可得

$$P_0(t)=\frac{\mu^2}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+(\lambda+2\mu)\alpha+\mu^2}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{\alpha t}+\frac{\beta^2+(\lambda+2\mu)\beta+\mu^2}{\beta(\beta-\alpha)}e^{\beta t}$$

$$P_1(t)=\frac{2\lambda\mu}{\alpha\beta}+\frac{2\lambda(\alpha+\mu)}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{\alpha t}+\frac{2\lambda(\beta+\mu)}{\beta(\beta-\alpha)}e^{\beta t}$$

$$P_2(t)=\frac{2\lambda^2}{\alpha\beta}+\frac{2\lambda^2}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{\alpha t}+\frac{2\lambda^2}{\beta(\beta-\alpha)}e^{\beta t}$$

于是，系统的瞬时可用度

$$A(t)=1-P_2(t)=\frac{2\lambda\mu+\mu^2}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}-\frac{2\lambda^2(\beta e^{\alpha t}-\alpha e^{\beta t})}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$$

由于α与β为负实数，故取极限得系统稳态可用度

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\frac{2\lambda\mu+\mu^2}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}$$

为求系统可靠度，需求解方程组$\widetilde{P}'_W(t)=\widetilde{P}_W(t)H$，加上初始条件即为

$$\begin{cases}(\widetilde{P}'_0(t),\ \widetilde{P}'_1(t))=(\widetilde{P}_0(t),\ \widetilde{P}_1(t))\begin{pmatrix}-2\lambda & 2\lambda\\ \mu & -(\lambda+\mu)\end{pmatrix}\\ (\widetilde{P}_0(0),\ \widetilde{P}_1(0))=(1,\ 0)\end{cases}$$

对上述方程组两端作L变换，并利用初始条件，可解得

$$\begin{cases}\widetilde{P}^*_0(s)=\dfrac{s+\lambda+\mu}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2}\\ \widetilde{P}^*_1(s)=\dfrac{2\lambda}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2}\end{cases}$$

将上述两式相加，并化成部分分式得

$$\begin{aligned}\widetilde{P}^*_0(s)+\widetilde{P}^*_1(s)&=\frac{s+3\lambda+\mu}{(s-\alpha')(s-\beta')}\\&=\frac{\alpha'+3\lambda+\mu}{\alpha'-\beta'}\cdot\frac{1}{s-\alpha'}\\&\quad+\frac{\beta'+3\lambda+\mu}{\beta'-\alpha'}\cdot\frac{1}{s-\beta'}\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中α'、β'是方程$s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2=0$的二个负实根。对(3.25)式作$L$反演可得

$$R(t)=\sum_{j\in W}\widetilde{P}_j(t)=\widetilde{P}_0(t)+\widetilde{P}_1(t)$$

$$
= \frac{\alpha' + 3\lambda + \mu}{\alpha' - \beta'} e^{\alpha' t} + \frac{\beta' + 3\lambda + \mu}{\beta' - \alpha'} e^{\beta' t}
$$

$$
= \frac{1}{\beta' - \alpha'} (\beta' e^{\alpha' t} - \alpha' e^{\beta' t})
$$

其中利用了等式 $\alpha' + \beta' = -(3\lambda + \mu)$。于是有

$$
\text{MTTFF} = \int_0^\infty R(t) \mathrm{d}t = -\frac{\alpha' + \beta'}{\alpha' \beta'} = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2}
$$

（四）二部件温贮备可修系统

设系统有如下特性：（1）系统由两个相同部件及一个修理设备组成，其中一部件工作，另一部件作温贮备。（2）处于工作状态的部件寿命 ξ 服从参数为 $\lambda > 0$ 的负指数分布，处于温贮备状态的部件寿命服从参数为 $\nu > 0$ 的负指数分布。（3）当贮备部件先于工作部件发生故障时，故障部件立即被修理，工作部件可继续工作；当工作部件先于贮备部件发生故障时，故障部件立即被修理，而贮备部件则立即转为工作状态，此时寿命仍服从参数为 $\lambda > 0$ 的负指数分布，而与已贮备了多长时间无关。（4）由于只有一台修理设备，因此当两个部件均失效时，只能修理其中一个部件，而另一部件将处于待修状态。设发生故障（无论是工作时还是贮备时发生故障）部件的修理时间服从参数为 $\mu > 0$ 的负指数分布。（5）各部件的工作、贮备、修理均相互独立，且修复后的部件其性能与新的一样，各部件的状态转换开关是完全可靠的，开关转换是瞬时的。（6）系统运行的初始时刻，两部件均处于正常状态。

为计算上述系统的可靠性指标，定义随机过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$，其中 $X(t)$ 表示 t 时刻已发生故障的部件数。易知 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为有限状态齐次马氏过程，其状态空间 $I = \{0, 1, 2\}$。该系统工作状态集为 $W = \{0, 1\}$，失效状态集 $F = \{2\}$，$I =$

$W \cup F$。根据系统特性，容易得到过程的状态转移密度图 3-18，及转移密度矩阵

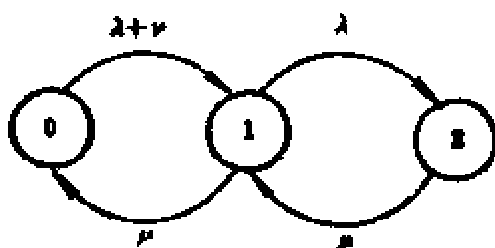


图 3-18

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda-\nu & \lambda+\nu & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

此中 $q_{01}=\lambda+\nu$ 是由于工作部件与贮备部件均可能发生故障，而其发生故障的密度分别为 λ 与 ν。

设 $P_j(t)=P(X(t)=j)$, $P(t)=(P_0(t), P_1(t), P_2(t))$ 于是，$P(t)$ 应满足K－F向前方程 $P'(t)=P(t)Q$，将其展开可得

$$\begin{cases} P_0'(t)=-(\lambda+\nu)\quad P_0(t)+\mu \quad P_1(t) \\ P_1'(t)=(\lambda+\nu)\quad P_0(t)-(\lambda+\mu)\quad P_1(t)+\mu\quad P_2(t) \\ P_2'(t)= \lambda \quad P_1(t)-\mu\quad P_2(t) \end{cases} \tag{3.26}$$

并有初始条件

$$P_0(0)=1, \quad P_1(0)=P_2(0)=0$$

对 (3.26) 式作 L 变换并利用初始条件，可解得

$$\begin{aligned} P_2^*(s) &= \frac{\lambda(\lambda+\nu)}{s[s^2+(2\lambda+\nu+2\mu)s+(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2]} \\ &= \frac{\lambda(\lambda+\nu)}{s(s-\alpha)(s-\beta)} \\ &= \frac{\lambda(\lambda+\nu)}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{s}+\frac{\lambda(\lambda+\nu)}{\alpha(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{s-\alpha} \\ &\quad +\frac{\lambda(\lambda+\nu)}{\beta(\beta-\alpha)}\cdot\frac{1}{s-\beta} \end{aligned}$$

其中α与β是方程

$$s^2+(2\lambda+\nu+2\mu)s+(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2=0$$

的二个负实根。反演$P_2^*(s)$，可得

$$P_2(t)=\frac{\lambda(\lambda+\nu)}{\alpha\beta}+\frac{\lambda(\lambda+\nu)}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{\alpha t}+\frac{\lambda(\lambda+\nu)}{\beta(\beta-\alpha)}e^{\beta t}$$

因此，系统可用度为

$$A(t)=1-P_2(t)=\frac{\lambda\mu+\nu\mu+\mu^2}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2}$$

$$-\frac{\lambda(\lambda+\nu)}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}(\beta e^{\alpha t}-\alpha e^{\beta t})$$

由于α与β为负实数，故系统稳态可用度

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\frac{\lambda\mu+\nu\mu+\mu^2}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2}$$

事实上，也可以不通过L变换来得到A。因为由转移密度图3-18知该系统所有状态互通，因而$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$是一个不可约的有限状态齐次马氏过程，于是极限$\lim\limits_{t\to\infty}P(X(t)=j)=\lim\limits_{t\to\infty}P_j(t)=P_j$存在，且构成概率分布$\sum\limits_{j=0}^{2}P_j=1$。这样，由图3-18及概率守恒原理可得到方程组

$$\begin{cases}(\lambda+\nu)P_0=\mu P_1\\(\lambda+\mu)P_1=(\lambda+\nu)P_0+\mu P_2\\\mu P_2=\lambda P_1\end{cases}$$

再加上正规化条件$\sum\limits_{j=0}^{2}P_j=1$并求解，可得

$$P_2=\frac{\lambda(\lambda+\nu)}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2}$$

从而可得系统稳态可用度

$$A=\lim_{t\to\infty} A(t)=\lim_{t\to\infty}(1-P_2(t))$$

$$=1-P_2=\frac{\lambda\mu+\nu\mu+\mu^2}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2}$$

为求系统可靠度$R(t)$，可令故障状态2为吸收态，并利用(3.16)式可得方程组

$$(\widetilde{P}'_0(t),\ \widetilde{P}'_1(t))=(\widetilde{P}_0(t),\ \widetilde{P}_1(t))\begin{bmatrix}-\lambda-\nu & \lambda+\nu\\ \mu & -\lambda-\mu\end{bmatrix}$$

加上初始条件$\widetilde{P}_0(0)=1$，$\widetilde{P}_1(0)=0$，通过L变换，可解得$\widetilde{P}^*_0(s)$与$\widetilde{P}^*_1(s)$，将其相加可得到

$$\widetilde{P}^*_0(s)+\widetilde{P}^*_1(s)=\frac{s+2\lambda+\mu+\nu}{s^2+(2\lambda+\mu+\nu)s+\lambda(\lambda+\nu)}$$

$$=\frac{s+2\lambda+\mu+\nu}{(s-\alpha')(s-\beta')}$$

$$=\frac{\alpha'+2\lambda+\mu+\nu}{\alpha'-\beta'}\cdot\frac{1}{s-\alpha'}$$

$$+\frac{\beta'+2\lambda+\mu+\nu}{\beta'-\alpha'}\cdot\frac{1}{s-\beta'}$$

其中α'与β'是方程

$$s^2+(2\lambda+\mu+\nu)s+\lambda(\lambda+\nu)=0$$

的两个负实根。对$\widetilde{P}^*_0(s)+\widetilde{P}^*_1(s)$作$L$反演，可得

$$R(t)=\widetilde{P}_0(t)+\widetilde{P}_1(t)=\frac{\alpha'+2\lambda+\mu+\nu}{\alpha'-\beta'}e^{\alpha' t}$$

$$+\frac{\beta'+2\lambda+\mu+\nu}{\beta'-\alpha'}e^{\beta' t}$$

$$=\frac{1}{\alpha'-\beta'}(\alpha' e^{\beta' t}-\beta' e^{\alpha' t})$$

$$\text{MTTFF}=\int_0^{\infty}R(t)\mathrm{d}t=\frac{-(\alpha'+\beta')}{\alpha'\beta'}=\frac{2\lambda+\mu+\nu}{\lambda(\lambda+\nu)}$$

（五）具有优先权的两部件冷贮备可修系统

该系统有如下特性：（1）系统由两个部件及一台修理设备组成，其中一个部件工作，另一部件冷贮备（即贮备期间性能不变坏），当工作部件发生故障时，贮备部件立即转为工作状态，修理设备即对故障部件进行修理。（2）在两个部件中，部件甲对部件乙有强占优先权。即当发生故障的部件甲被修好时，若部件乙正在工作，则部件甲立即进入工作状态，而部件乙只能暂停工作而转入贮备状态；当部件甲发生故障时，若部件乙正在修理，则部件乙只能暂停修理而转入待修状态，修理设备立即来修部件甲。（3）部件甲、乙的工作寿命分别服从参数为λ_1、λ_2的负指数分布（$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$）。（4）部件甲、乙发生故障后的修理时间分别服从参数为μ_1、μ_2的负指数分布（$\mu_1>0$，$\mu_2>0$）。（5）各部件的工作、修理均相互独立，且修复后的部件与新的一样。各部件的转换开关是可靠的，开关转换是瞬时的。（6）系统运行的初始时刻，两个部件均处于正常状态，其中部件甲工作，部件乙贮备。

由于指数分布的无记忆性，部件乙从贮备状态进入工作状态时，其工作寿命与部件乙在贮备前是否工作过或曾工作过多长时间无关；同样，当部件乙从待修状态转入修理状态时，其修理时间与待修前是否修理过或曾修理过多长时间无关。

为计算上述系统的可靠性指标，定义随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$。其中$X(t)$表示t时刻系统所处的状态，具体来说，有

$$X(t)=\begin{cases}0, & t\text{时刻部件甲工作，部件乙贮备}\\ 1, & t\text{时刻部件甲工作，部件乙修理}\\ 2, & t\text{时刻部件乙工作，部件甲修理}\\ 3, & t\text{时刻部件甲修理，部件乙待修}\end{cases}$$

该过程有状态空间$I=\{0, 1, 2, 3\}$，其中$W=\{0, 1, 2\}$为工作状态集，$F=\{3\}$为失效状态集，$I=W\cup F$。易知

过程$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$为有限状态齐次马氏过程，并有状态转移密度图 3-19 及状态转移矩阵

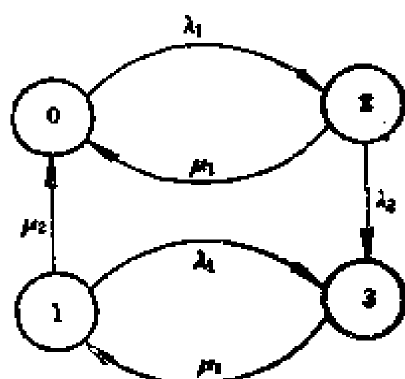


图 3-19

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 & \lambda_2 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

利用K-F向前方程及初始条件可得

$$\begin{cases} (P_0'(t),\ P_1'(t),\ P_2'(t),\ P_3'(t))=(P_0(t), \\ \quad P_1(t), P_2(t),\ P_3(t))Q \\ (P_0(0),\ P_1(0),\ P_2(0),\ P_3(0)) \\ \quad =(1,\ 0,\ 0,\ 0) \end{cases}$$

求解上述方程可得$P(t)=(P_0(t),\ P_1(t),\ P_2(t), P_3(t))$，考虑到$P^*(s)=(P_0^*(s),\ P_1^*(s),\ P_2^*(s),\ P_3^*(s))$的形式及其$L$反演较复杂，故以下只求稳态可靠性指标。

利用图 3-19 及概率守恒原理可得方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 P_0=\mu_2 P_1+\mu_1 P_2 \\ (\lambda_1+\mu_2)P_1=\mu_1 P_3 \\ (\lambda_2+\mu_1)P_2=\lambda_1 P_0 \\ \mu_1 P_3=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2 \end{cases} \qquad \sum_{i=0}^{3} P_i=1$$

求解上述方程组得到

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)} \\ P_1 = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}P_0 \\ P_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2+\mu_1}P_0 \\ P_3 = \dfrac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}P_0 \end{cases}$$

于是，系统的稳态可用度

$$A = P_0 + P_1 + P_2 = 1 - P_3$$

由定理 3.3 可知 MTTFF $= \sum_{j=0}^{2} x_j$，其中 x_0，x_1，x_2满足线性方程组

$$(x_0,\ x_1,\ x_2)\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_2 & -(\lambda_1+\mu_2) & 0 \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda_2+\mu_1) \end{bmatrix} = (-1,0,0)$$

求解可得

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1\lambda_2} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{\lambda_2} \end{cases}$$

于是有

$$\text{MTTFF} = \frac{\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1\lambda_2}$$

§3.4* 非马氏可修系统分析

由前可知，在讨论马氏可修系统特性时，由于其故障的到达与修复时间均具有无后效性，从而可利用齐次马氏过程的一些基本性质来求解系统的可靠性数量指标。然而，对一般的非马氏可

修系统，例如仅考虑修复时间Y为一般分布且有一个修理工的可修系统时，问题就不那么简单了。此时若仍设$N(t)$表示t时刻系统发生故障的部件数，则在仅知$N(t)=i$的条件下是无法预测$N(t+\Delta t)$的概率规律的。因为它不仅依赖于t时刻系统的状态，还依赖于被修理的部件在t时刻以前究竟修理了多长时间，这样也就无法直接运用齐次马氏过程这一有力工具去解决问题，为此，人们通过探索，提出了一些新的工具，如马氏更新过程法、补充变量法等。本节通过一个简单的模型来介绍补充变量法解决非马氏可修系统的基本思想。

（一）基本模型及状态方程

考虑一个二部件并联系统，该系统有如下特性：（1）系统由两个同型部件和一个修理设备组成。令$N(t)=i$表示t时刻有i个部件发生故障，$i=0, 1, 2$。设系统中部件的故障规律为

$$P(N(t+\Delta t)=1 \mid N(t)=0)=\lambda_0\Delta t+o(\Delta t),\quad \lambda_0>0 \tag{3.27}$$

$$P(N(t+\Delta t)=2 \mid N(t)=1)=\lambda_1\Delta t+o(\Delta t),\quad \lambda_1>0$$

（2）当系统运行过程中，若有一个部件发生故障时，修理设备立即对其进行修理，而此时若另一部件也发生故障，则需要等待修理。设每个部件修理时间y均服从一般分布$G(t)$，且存在密度函数$g(t)$，有均值$E(y)=\int_0^\infty tg(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\mu}$，$\mu>0$。（3）设修理时间$y$与上述部件的故障发生规律是相互独立的，且故障部件经修复后将与新部件一样。（4）系统运行的初始时刻，两个部件均处于正常状态。

利用补充变量法来处理上述模型，其基本思路类似于排队论中涉及的嵌入马氏链法。它们都是将一个不易处理的非马氏过程经过“改造”，使其具有马氏性，从而通过对“改造”后的新过

程（马氏过程）的概率特性的研究，来探索原过程(非马氏过程)的概率特性。然而在处理方式上，两种方法则有所不同，嵌入马氏链法是将原过程（连续时间)"缩小"为一个离散时间马氏链(称为嵌入马氏链)，而补充变量法则是将原过程"扩大"为一个二元随机过程。具体作法如下：

引进补充变量$X(t)$，当$N(t)=1$或2时，$X(t)$表示时刻t正在修理的部件在时刻t之前已修理过多长时间；当$N(t)=0$时，由于没有故障部件的修理，故$X(t)$可不予考虑。这样，二元随机过程$\{N(t),\ X(t);\ t\geqslant 0\}$是一个连续时间的广义的 Markov 过程，亦即在任意时刻t，当给定$N(t)$和$X(t)$的具体值后，过程$\{N(t),\ X(t);\ t\geqslant 0\}$在时刻$t$以后的概率规律将与$t$以前该过程的历史无关。

为了求解上述二元随机过程的概率特性，注意到对任何固定的t，$N(t)$与$X(t)$分别为离散型随机变量与连续型随机变量，故我们引入如下形式的状态概率。对任何$t\geqslant 0$，及$x\geqslant 0$，令

$$P_0(t)=P(N(t)=0) \tag{3.28}$$

$$P_j(t,\ x)\mathrm{d}x=P(N(t)=j,$$

$$x<X(t)\leqslant x+\mathrm{d}x),\quad j=1\text{或}2$$

显然，$P_j(t,\ x)$是有其概率含义的，它表示系统在t时刻有j个部件失效，而正在修理的部件在t时刻前已修理过时间x的概率密度。

由题设知，系统有初始条件

$$P_0(0)=1,\ P_1(0,\ x)=P_2(0,\ x)=0 \tag{3.29}$$

此外，引进符号$\mu(t)$，使其与修复时间y满足如下特性：

$$\mu(t)\Delta t=P(t<y\leqslant t+\Delta t|y>t)=\frac{g(t)\Delta t}{1-G(t)}$$

则易证有如下二个等式

$$1-G(t)=\exp\left[-\int_0^t \mu(y)\mathrm{d}y\right]$$

$$g(t)=\mu(t)\exp\left[-\int_0^t \mu(y)\mathrm{d}y\right] \qquad (3.30)$$

显然，$\mu(t)$ 是有其物理含义的，它表示 t 时刻修理设备对故障部件的瞬时修复率。

下面利用古典的微分方程解法来依次推导状态概率 $P_0(t)$ 与状态概率密度 $P_1(t, x)$、$P_2(t, x)$ 应满足的微分方程。若设 $M(t, t+\Delta t)$ 表示在时间区间 $(t, t+\Delta t]$ 内发生失效的部件数，$\theta(t, t+\Delta t)$ 表示在时间区间 $(t, t+\Delta t]$ 内发生失效部件的修复数。则事件 $N(t+\Delta t)=0$ 可分解为如下三项事件之和：

（1）$N(t)=0$、$M(t, t+\Delta t)=0$，其概率为 $P_0(t)(1-\lambda_0\Delta t)+o(\Delta t)$

（2）$N(t)=1$，$X(t)=x$，x 可为任意正数，$\theta(t, t+\Delta t)=1$，其概率为 $\int_0^\infty P_1(t, x)\mu(x)\Delta t\mathrm{d}x$，其中利用了下述等式

$$P(\theta(t, t+\Delta t)=1 \mid N(t)=1, X(t)=x)=$$
$$P(x<y\leqslant x+\Delta t \mid y>x)=\mu(x)\Delta t$$

（3）$N(t)=2$，$X(t)=x$，x 可为任意正数，$N(t+\Delta t)=0$，其概率为 $o(\Delta t)$。

从而有

$$P_0(t+\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=0)$$
$$=P_0(t)(1-\lambda_0\Delta t)+\int_0^\infty P_1(t, x)\cdot\mu(x)\Delta t\mathrm{d}x+o(\Delta t)$$

或有

$$\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda_0 P_0(t)+\int_0^\infty P_1(t, x)\mu(x)\mathrm{d}x \qquad (3.31)$$

注意到为使$N(t+\Delta t)=1$，$x+\Delta t<X(t+\Delta t)\leqslant x+\Delta t+\Delta x$，$x>0$。必须$N(t)=1$，$x<X(t)\leqslant x+\Delta x$，且在$(t, t+\Delta t]$内既无部件发生故障，又无部件修理完成。此即为

$$
\begin{aligned}
&P_1(t+\Delta t, x+\Delta t)\Delta x=P(N(t+\Delta t)\\
&=1, x+\Delta t<X(t+\Delta t)\leqslant x+\Delta t+\Delta x)\\
&=P(N(t)=1, x<X(t)\leqslant x+\Delta x, M(t, t+\Delta t)\\
&=0, \theta(t, t+\Delta t)=0)\\
&=P_1(t, x)\Delta x(1-\lambda_1\Delta t)(1-\mu(x)\Delta t)+o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&P_1(t+\Delta t, x+\Delta t)-P_1(t, x)=-(\lambda_1+\mu(x))P_1(t,\\
&x)\Delta t+o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

或有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P_1(t, x)+\frac{\partial}{\partial x}P_1(t, x)\\
&\qquad=-(\lambda_1+\mu(x))P_1(t, x), \quad x>0 \qquad\qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

类似地，为使$N(t+\Delta t)=2$，$x+\Delta t<X(t+\Delta t)\leqslant x+\Delta t+\Delta x$，必须$N(t)=2$，$x<X(t)\leqslant x+\Delta x$，且在$(t, t+\Delta t]$内部件的修理未完成；或者$N(t)=1$，$x<X(t)\leqslant x+\Delta x$，且在$(t, t+\Delta t]$内部件的修理尚未完成，而又有一部件发生故障。即有

$$
\begin{aligned}
&P_2(t+\Delta t, x+\Delta t)\Delta x=P(N(t+\Delta t)\\
&=2, x+\Delta t<X(t+\Delta t)\leqslant x+\Delta t+\Delta x)\\
&=P(N(t)=2, x<X(t)\leqslant x\\
&\quad+\Delta x, \theta(t, t+\Delta t)=0)+P(N(t)\\
&=1, x<X(t)\leqslant x+\Delta x, \theta(t, t+\Delta t)\\
&=0, M(t, t+\Delta t)=1)=P_2(t, x)\Delta x(1-\mu(x)\Delta t)\\
&\quad+P_1(t, x)\Delta x(1-\mu(x)\Delta t)\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

从而有

$$P_2(t+\Delta t, x+\Delta t)-P_2(t, x)$$
$$=-P_2(t, x)\mu(x)\Delta t+P_1(t, x)\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$$

或有

$$\frac{\partial}{\partial t}P_2(t, x)+\frac{\partial}{\partial x}P_2(t, x)$$
$$=-\mu(x)P_2(t, x)+\lambda_1P_1(t, x), \quad x>0 \tag{3.33}$$

最后，为使$N(t+\Delta t)=1$，$0<X(t+\Delta t)\leqslant\Delta t$，必须$N(t)=0$，且在$(t, t+\Delta t]$内有一部件发生故障；或$N(t)=2$，$0<X(t)<\infty$且在$(t, t+\Delta t]$内正在修理的部件完成修理，即有

$$P_1(t+\Delta t, 0)\Delta t=P(N(t+\Delta t)$$
$$=1, 0<X(t+\Delta t)\leqslant\Delta t)=P(N(t)$$
$$=0, M(t, t+\Delta t)=1)+P(N(t)$$
$$=2, 0<X(t)<\infty, \theta(t, t+\Delta t)=1)$$
$$=P_0(t)\lambda_0\Delta t+\int_0^\infty P_2(t, x)\mu(x)\Delta t\mathrm{d}x$$
$$+o(\Delta t)$$

从而有

$$P_1(t, 0)=\lambda_0P_0(t)+\int_0^\infty P_2(t, x)\mu(x)\mathrm{d}x \tag{3.34}$$

除此之外，显然还应有等式

$$P_2(t, 0)=0 \tag{3.35}$$

$$P_0(t)+\int_0^\infty P_1(t, x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_2(t, x)\mathrm{d}x=1 \tag{3.36}$$

（二）系统可用度

注意到系统的瞬时可用度为

$$A(t)=P_0(t)+\int_0^\infty P_1(t, x)\mathrm{d}x$$

或作L变换，有

$$A^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A(t)dt=P_0^*(s)+\int_0^\infty P_1^*(s, x)dx$$

因此，只需求得$P_0^*(s)$与$P_1^*(s, x)$并代入上式即可得$A^*(s)$。为此，对方程（3.31）到（3.36)的两端作L变换，并用初始条件（3.29）代入，得到

$$SP_0^*(s)-1=-\lambda_0P_0^*(s)+\int_0^\infty P_1^*(s, x)\mu(x)dx \tag{3.37}$$

$$SP_1^*(s, x)+\frac{\partial}{\partial x}P_1^*(s, x)=-(\lambda_1+\mu(x))P_1^*(s, x), \quad x>0 \tag{3.38}$$

$$SP_2^*(s, x)+\frac{\partial}{\partial x}P_2^*(s, x)=-\mu(x)P_2^*(s, x)+\lambda_1P_1^*(s, x), \quad x>0 \tag{3.39}$$

$$P_1^*(s, 0)=\lambda_0P_0^*(s)+\int_0^\infty P_2^*(s, x)\mu(x)dx \tag{3.40}$$

$$P_2^*(s, 0)=0 \tag{3.41}$$

$$P_0^*(s)+\int_0^\infty P_1^*(s, x)dx+\int_0^\infty P_2^*(s, x)dx=\frac{1}{s} \tag{3.42}$$

求解方程（3.38）并以（3.30）式代入有

$$\begin{aligned}P_1^*(s, x)&=P_1^*(s, 0)\cdot\exp\left[-\int_0^x(s+\lambda_1+\mu(y))dy\right]\\&=P_1^*(s, 0)e^{-(s+\lambda_1)x}[1-G(x)]\end{aligned} \tag{3.43}$$

将上式代入（3.37）式，并利用（3.30）式可得

$$sP_0^*(s)-1=-\lambda_0P_0^*(s)+P_1^*(s, 0)\int_0^\infty e^{-(s+\lambda_1)x}\cdot[1-G(x)]\mu(x)dx$$

$$= -\lambda_0 P_0^*(s) + P_1^*(s,\ 0)\int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda_1)x} g(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\lambda_0 P_0^*(s) + P_1^*(s,\ 0) g^*(s+\lambda_1)$$

其中$g^*(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\mathrm{d}G(x)=\int_0^{\infty} e^{-sx} g(x)\mathrm{d}x$。求解上式可得

$$P_0^*(s) = P_1^*(s,\ 0)\frac{g^*(s+\lambda_1)}{s+\lambda_0}+\frac{1}{s+\lambda_0} \tag{3.44}$$

由（3.33）式解出$P_1^*(s,\ x)$，并以（3.30），（3.41），（3.43）式代入得

$$P_1^*(s,\ x) = e^{-\int_0^x (s+\mu(y))\mathrm{d}y}\Big\{P_1^*(s,\ 0)$$

$$+\int_0^x \lambda_1 P_1^*(s,\ y) e^{\int_0^y (s+\mu(z))\mathrm{d}z}\mathrm{d}y\Big\}$$

$$= e^{-sx}(1-G(x))\lambda_1\int_0^x P_1^*(x,\ y)$$

$$\cdot\ e^{\int_0^y (s+\mu(z))\mathrm{d}z}\mathrm{d}y$$

$$= P_1^*(s,\ 0)(1-G(x))e^{-sx}(1-e^{-\lambda_1 x}) \tag{3.45}$$

以（3.43），（3.44），（3.45）代入（3.42）可得

$$P_1^*(s,\ 0) = \frac{\lambda_0}{sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)(1-g^*(s))} \tag{3.46}$$

以（3.46）式再代回（3.43），（3.44），（3.45）可得

$$\begin{cases} P_0^*(s) = \dfrac{1-g^*(s)+g^*(s+\lambda_1)}{sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)[1-g^*(s)]} \\ P_1^*(s,\ x) = \dfrac{\lambda_0[1-G(x)]e^{-(s+\lambda_1)x}}{sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)[1-g^*(s)]} \end{cases} \tag{3.47}$$

$$P_1^*(s,\ x)=\frac{\lambda_0[1-G(x)]e^{-sx}(1-e^{-\lambda_1 x})}{sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)[1-g^*(s)]}$$

以（3.47）式代入下式，可求得

$$A^*(s)=P_0^*(s)+\int_0^\infty P_1^*(s,\ x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(s+\lambda_1)[1-g^*(s)+g^*(s+\lambda_1)]+\lambda_0[1-g^*(s+\lambda_1)]}{(s+\lambda_1)[sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)(1-g^*(s))]}$$

可以证明 $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)=A$ 存在，于是由 L 变换性质，可以求得系统的稳态可用度为

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0}sA^*(s)=\frac{\lambda_0+(\lambda_1-\lambda_0)g^*(\lambda_1)}{\lambda_1 g^*(\lambda_1)+\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu}}$$

其中利用了L'Hospital法则及等式

$$g^*(0)=1,\ g^{*\prime}(0)=-\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)=-\frac{1}{\mu}$$

（三）系统可靠度

类似于§3.3的处理方法，为求系统可靠度 $R(t)$，只需将过程 $\{N(t),\ X(t);\ t\geqslant 0\}$ 的工作状态保留，而将失效状态改为吸收态即可。根据本模型为并联系统的特性，需将 $N(t)=2$ 这一失效态改为吸收态即在原过程 $\{N(t),\ X(t);\ t\geqslant 0\}$ 的基础上来构造一个新过程 $\{\tilde{N}(t),\ \tilde{X}(t);\ t\geqslant 0\}$，其中 $\tilde{N}(t)$ 仍表示 t 时刻系统发生故障的部件数。当 $\tilde{N}(t)=1$ 时，$\tilde{X}(t)$ 表示 t 时刻正在修理的部件在 t 时刻前已修理过多长时间；当 $\tilde{N}(t)=0$ 或 2 时，则 $\tilde{X}(t)$ 可以不考虑。因为 $\tilde{N}(t)=2$ 是过程的吸收态，一旦系统进入该状态，过程将中止。如果我们将图3-20粗略地视为原过程 $\{N(t),\ X(t),\ t\geqslant 0\}$ 的转移密度图，则图3-21 即可视为新过程 $\{\tilde{N}(t),\ \tilde{X}(t);\ t\geqslant 0\}$ 的转移密度图。因此，新过程是一个有吸收态的广义 Markov 过程，并仍应

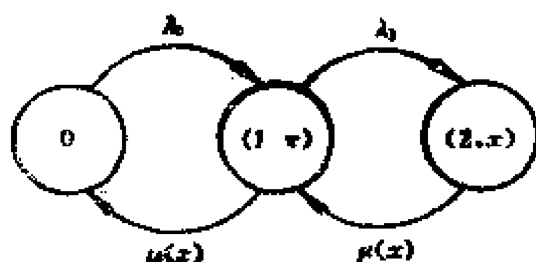


图 3-20

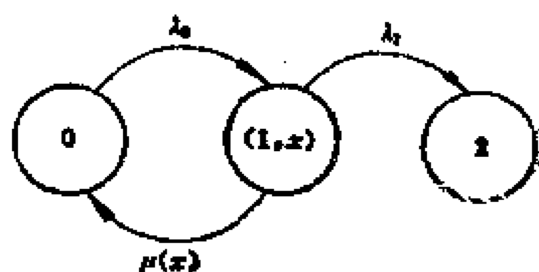


图 3-21

有转移概率

$$P(\widetilde{N}(t+\Delta t)=i+1|\widetilde{N}(t)=i)=\lambda_i\Delta t+o(\Delta t),$$

$$i=0,\ 1$$

对新过程，定义状态概率：

$$\theta_0(t)=P(\widetilde{N}(t)=0)$$

$$\theta_1(t,\ x)\mathrm{d}x=P(\widetilde{N}(t)=1,\ x<\widetilde{X}(t)\leqslant x+\mathrm{d}x)$$

则易知系统可靠度

$$R(t)=\theta_0(t)+\int_0^{\infty}\theta_1(t,\ x)\mathrm{d}x \tag{3.48}$$

容易建立$\theta_0(t)$与$\theta_1(t,\ x)$的微分方程组。事实上，只需在(3.31)，(3.32)，(3.34)式中分别将$P_0(t)$换成$\theta_0(t)$，$P_1(t,\ x)$换成$\theta_1(t,\ x)$，并令$P_2(t,\ x)=0$即可。于是可得

$$\begin{cases}\dfrac{d}{\mathrm{d}t}\theta_0(t)=-\lambda_0\theta_0(t)+\displaystyle\int_0^{\infty}\theta_1(t,\ x)\mu(x)\mathrm{d}x\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\theta_1(t,\ x)+\dfrac{\partial}{\partial x}\theta_1(t,\ x)=-[\lambda_1+\mu(x)]\\ \cdot\theta_1(t,\ x),\quad x>0\\ \lambda_0\theta_0(t)=\theta_1(t,\ 0)\end{cases}$$

$$(3.49)$$

由前假设，$t=0$时系统的两个部件都是好的，故应有

$$\theta_0(0)=1,\ \theta_1(0,\ x)=0 \tag{3.50}$$

对（3.49）式两边作L变换，并利用（3.50）式，有

$$\begin{cases} s\theta_0^*(s) - 1 = -\lambda_0\theta_0^*(s) + \int_0^\infty \theta_1^*(s, x)\mu(x)\mathrm{d}x & (3.51) \\ s\theta_1^*(s, x) + \frac{\partial}{\partial x}\theta_1^*(s, x) = -[\lambda_1 + \mu(x)]\theta_1^*(s, x) & (3.52) \\ \lambda_0\theta_0^*(s) = \theta_1^*(s, 0) & (3.53) \end{cases}$$

求解（3.52）式，并以（3.30），（3.53）式代入，得

$$\begin{aligned} \theta_1^*(s, x) &= \theta_1^*(s, 0)e^{-(s+\lambda_1)x}e^{-\int_0^x \mu(y)\mathrm{d}y} \\ &= \lambda_0\theta_0^*(s)e^{-(s+\lambda_1)x}(1 - G(x)) \end{aligned} \tag{3.54}$$

将（3.54）式代入（3.51）式，可解得

$$\theta_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_0(1 - g^*(s + \lambda_1))} \tag{3.55}$$

将上式代回（3.54）式，可得

$$\theta_1^*(s, x) = \frac{\lambda_0 e^{-(s+\lambda_1)x}(1 - G(x))}{s + \lambda_0(1 - g^*(s + \lambda_1))} \tag{3.56}$$

对（3.48）式两端作L变换，并以（3.55），（3.56）式代入，可得

$$\begin{aligned} R^*(s) &= \int_0^\infty e^{-st}R(t)\mathrm{d}t = \theta_0^*(s) + \int_0^\infty \theta_1^*(s, x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{s + \lambda_1 + \lambda_0(1 - g^*(s + \lambda_1))}{(s + \lambda_1)[s + \lambda_0(1 - g^*(s + \lambda_1))]} \end{aligned}$$

从而还可求得系统首次故障前平均工作时间

$$\begin{aligned} \text{MTTFF} &= \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t = \lim_{s \to 0} R^*(s) \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_0(1 - g^*(\lambda_1))}{\lambda_1\lambda_0(1 - g^*(\lambda_1))} \end{aligned}$$

习 题 三

1．设产品寿命Z服从Weibull分布。求该产品的$R(t)$，MTTF与$\lambda(t)$。

2. 一可靠性系统，其瞬时可用度为$A(t)$，$\tilde{A}(t)=\frac{1}{t}\cdot\int_0^t A(s)ds$称为系统在[0，$t$]时间内的平均可用度。若有$\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=A$，求证 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{A}(t)=A$。

3. 设$F(x)$是连续型寿命分布，$F(0)=0$，试证明$F(x)=1-e^{-\lambda x}$，$x\geqslant 0$，$\lambda>0$的充分必要条件是$\lambda(t)=\lambda>0$，对所有的$t\geqslant 0$成立。

4. 某产品受到随机冲击后将会失效，今设随机冲击流$\{N(t), t>0\}$为Poisson流，平均到达率$\lambda>0$（其中$N(t)$表示（0，t]内的冲击次数），且产品受到k次冲击后即会失效，试求产品的寿命分布$F(x)$，可靠度$R(t)$与失效率$\lambda(t)$。

5. 某混联系统由五个单元组成，其可靠性结构框图见图3-22，今设各单元的工作相互独立，寿命分布均为指数分布，且设单元e_1，e_2，e_3的失效率均为λ_1，而单元e_4，e_5的失效率为λ_2与λ_3。求该系统的可靠度及MTTF。

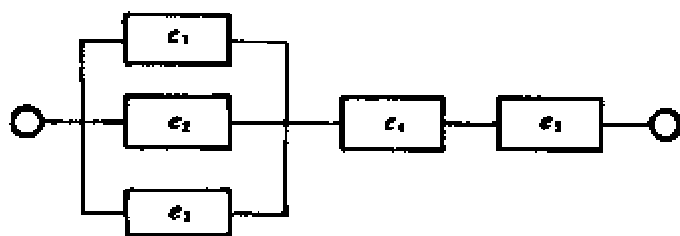


图 3-22

6. 某型喷气式飞机有三个发动机，必须至少有二台发动机正常工作时才能安全飞行。今设飞机事故的发生仅由发动机失效所引起，若三台发动机寿命相互独立，且具有相同的负指数分布，平均寿命为2×10^3小时，试求当$t=100$小时时飞机的可靠度。

7. 一个可靠性系统由n个部件和一个转换开关组成，系统工作初始时刻，一部件开始工作，其余部件作冷贮备。当工作部件失效时，转换开关立即转接贮备部件。但开关不完全可靠，在每次使用时，开关正常的概率为p，失效的概率为$q=1-p$。今设n个部件的寿命X_1、X_2、…，X_n独立同负指数分布，平均寿命为$1/\lambda>0$，且与开关的好坏也独立。试求该系统的可靠度$R(t)$与MTTF。

8. 一可靠性系统由两个部件并联而成，此两个部件的寿命X_1与X_2服从二维指数分布，其联合生存概率为

$$P(X_1>t_1,\ X_2>t_2)=\exp[-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}\max(t_1,\ t_2)]$$

其中λ_1，λ_2，$\lambda_{12}>0$。试求该系统的可靠度$R(t)$与MTTF。

9. 考虑一马氏可修系统，$X(t)=i$表示t时刻系统处于状态i，$i\in I=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$，$N(t)$表示$(0,\ t]$时间内系统的故障次数。令$M_i(t)=E\{N(t)|X(0)=i\}$，$i\in I$，$M(t)=(M_0(t),\ M_1(t),\ \cdots,\ M_N(t))^T$。试求$M(t)$应满足的矩阵微分方程。（注：设$\dfrac{dM_i(t)}{dt}=m_i(t)$，$m_i(t)$称为系统在$t=0$时从初始状态$i$出发条件下，在$t$时刻的瞬时故障频度）。

10. 考虑一单部件可修系统，仅有工作与故障两个状态，有分布$F(t)=P(X\leqslant t)=1-e^{-\lambda t}$，$t\geqslant 0$，$\lambda>0$。部件故障后的修理时间$Y$有分布$P(Y\leqslant t)=1-e^{-\mu t}$，$t\geqslant 0$，$\mu>0$。今设$X$与$Y$相互独立，故障部件修复后的寿命分布与新的部件相同，且初始时刻系统处于工作状态。试求（1）系统的可瞬时可用度$A(t)$与稳态可用度A。（2）系统可靠度$R(t)$与MTTFF。

11. 考虑两单元串联系统，其中单元Ⅰ是不可修理单元，其可靠度为$e^{-\lambda_1 t}$，$t>0$，$\lambda_1>0$，单元Ⅱ是可修单元，其寿命和维修时间分别服从参数λ_2与μ_2的负指数分布（$\lambda_2>0$，$\mu_2>0$），其他假设与上题相同，并设初始时刻，单元Ⅰ和单元Ⅱ均处于工作状态。试求（1）系统的瞬时可用度与稳态可用度。（2）系统的$R(t)$与MTTFF。

12. 考虑三个相同单元一个修理工的$2/3(G)$系统。单元的寿命和维修时间分别服从参数为$\lambda>0$与$\mu>0$的负指数分布，各部件的寿命以及维修时间相互独立，故障部件修复后其寿命分布与新部件一样，且设初始时刻系统的三个单元都是正常的。试求（1）系统的$A(t)$与A。（2）系统的$R(t)$与MTTFF。

13. 考虑一个冷贮备系统，它由两个不同型部件和一个修理设备组成。当两个部件均正常时，其中一个部件工作，另一部件作冷贮备。当工作部件发生故障时，贮备部件立即替换并转为工作状态，而修理设备则对故障部件进行修理。当故障部件修好时，若工作部件也已发生故障，则它立即进入工作状态，否则，进入冷贮备状态。今设转接开关是完全可靠的，开关转换是瞬时的。部件i的寿命分布为$1-e^{-\lambda_i t}$，$t\geqslant 0$，故障后的修理时间分布为$1-e^{-\mu_i t}$，$t>0$，$(\lambda_i,\ \mu_i>0)$，$i=1,\ 2$。试求（1）系

统的稳态可用度A。（2）系统的MTTFF。

14．有六个相互独立工作的相同部件，按图3-23所示三种可靠性结构方式组成系统。今设各部件可靠度均为0.9，试求三个系统的可靠度，并比较其优劣。

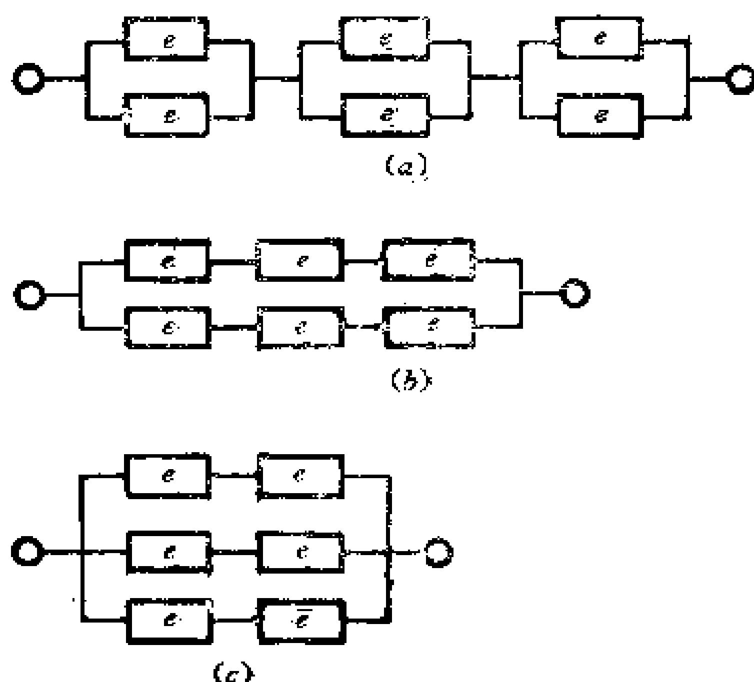


图 3-23

15．比较两相同部件组成的冷贮备系统、温贮备系统、并联系统的可靠度。设单元工作时的可靠度为$e^{-\lambda t}$，温贮备时的可靠度为$e^{-\mu t}$（$\lambda>0$，$\mu>0$）。

16．考虑一个由同型部件组成的冷贮备系统，部件的失效分布是负指数分布，失效率$\lambda=0.5/10^4$小时。若要求系统工作5000小时其系统可靠度大于0.997，试分别讨论如下几种情况：（1）转换开关完全可靠时，需配备多少个冷贮备部件？（2）转换开关成功转接的概率为0.8，能否达到上述可靠性要求？（3）若配备三个冷贮备部件，则转换开关成功转接的概率应取何值？

第四章　随机系统与随机过程的计算机模拟理论

计算机模拟（Computer Simulation）又称计算机仿真，它是随机运筹学应用中最具有广阔前景的分支之一，同时也是大系统研究中系统分析的有力工具和支柱。本章将通过模拟的基本概念，随机变量的模拟、随机过程的模拟、随机系统的模拟等内容来概要介绍计算机模拟的基本数学理论和方法。

§4.1　计算机模拟的基本概念

（一）什么是计算机模拟

所谓模拟就是将所研究的对象用其他手段来加以模仿的一种活动。当采用这种模拟方法来研究问题时，一般来说，人们并不直接观察所研究的对象及其变化过程，而是先设计出一个与该对象或其变化过程相类似的模型，然后通过模型来间接研究这个对象或其变化过程。模拟对于人们来说并不陌生，其历史可追溯到数千年以前，传说在我国东汉时期，曹冲为测定一只大象的重量，采用了如下方法：首先他把大象装在一只船上，并在船的外舷划一标志来表明船下沉的水平，然后卸去大象，再用石块装上船，直到船下沉到原有的水平为止，最后分批称石头的重量，从而获得大象的体重。曹冲利用浮力原理用石块来替代大象就是我国古代模拟学思想运用的生动实例。其他又如现代的军事演习。飞行器的风洞试验等都是模拟的应用实例。然而模拟学在很长的一段时期内始终处于停滞不前的状态，而只能在少数科技领域内得到应

用。分析其原因，主要在于上述模拟都是实物模拟，因而存在着价格昂贵，速度慢，不易重现试验结果等弱点。自廿世纪五十年代以来，由于电子计算机的出现，产生了一种新的模拟方法—计算机模拟。计算机模拟是一种对问题求数值解的方法，它利用电子计算机对一个客观复杂系统（研究对象）的结构和行为进行动态模仿，从而以安全和经济的手段来获得系统或其变化过程的特性指标，为决策者提供决策的依据。下面我们对计算机模拟的有关问题作概要的介绍。

1. 计算机模拟的应用范围与优缺点

随着计算机科学与系统科学的发展，计算机模拟的应用领域不断拓广，目前计算机模拟不仅在工程技术、科学试验、军事作战、生产管理中得到了应用，而且在财政金融甚至社会科学中也得到了广泛的应用。例如，在工程系统中（如机械系统、电子系统、计算机网络系统等），计算机模拟是系统规划、设计、分析、评价的有力工具；在管理系统中，对于企业管理，计算机模拟被用来作产品需求预测、确定最优库存量、安排生产计划、拟定企业的开发战略等。对于经济管理，计算机模拟被用来作国民经济预测、经济结构分析、政策评价等；在军事作战中，计算机模拟被用来作为坦克对抗、导弹对抗、多兵种协同作战对抗中的战略战术方案的规划与评价；在社会经济系统中，计算机模拟被用来作人口、人才、能源等方面的预测与规划；在科学试验中，计算机模拟为观察各种事物的变化过程提供了一个良好的“实验场所”。在这个“实验场所”中，人们可以观察、分析和研究农作物的栽培过程，核电站的运行过程，洲际导弹的飞行过程等，从而为真实的实验积累了大量的经验与知识。

计算机模拟的应用之所以如此广泛，除了计算机本身所具有的优点外，还在于它为实际系统的运行提供了一个假想的“实验场所”，从而使得实际问题中，一些实验无法付诸实施的研究问题，或者虽能实现真实试验，然而其代价极其昂贵，甚至会带来

某种风险的问题研究得到了解决。例如，要预测未来十五年的经济计划指标，人们无法让国民经济实际去运行一段时间来取得这些指标，但却可以构成一个经济模拟模型，利用尽可能搜集到的数据，根据不同的计划设想来对其进行各种模拟试验，从而得到各种预测的经济计划指标。对于企业管理人员来说，为使企业在竞争中发展壮大，新产品的研制以及新的开拓性投资将是十分重要而又带有风险性的决策问题，因为上述作法一旦遇到挫折甚至失败，将使企业蒙受巨大的经济损失甚至导致企业破产，其后果是十分严重的。因此，对于这一类问题应事先进行各方面的调查和分析，将不确定的因素取出来并组合到模型中去，然后设法变换有关的参数进行多次模拟试验，以便进一步较全面地认识这些不确定因素的实质，从而为今后制定有效的对策打下基础。综上所述，经济管理和企业管理中的许多复杂的决策问题，由于建立了对应的模拟模型，就可在计算机上进行多次反复模拟试验，进行大量方案的比较和评优，从而为管理决策提供了必要的数量依据，这正是计算机模拟的主要优点之一。当然，计算机模拟也不是万能的，基于它目前尚处于发展之中，一些问题还有待解决。例如精度估计问题、收敛速度问题等等。因此，搞清实际问题，恰当运用计算机模拟方法将是重要的。

2. 模拟模型及其分类

当采用计算机模拟来研究一个复杂系统的状态特性时，通常是通过构造其对应的模拟模型来实现的。所谓模型乃是任何一组对某事物的规则和关系的描述。这种描述可以用思维规则来完成，它称为思维模型；可以用语言的陈述来描述，它称为陈述性模型；也可以用方程、解析式或图来描述，它称为数学模型。模拟模型属于数学模型，但它又与过去人们熟悉的采用方程或解析式形式的数学模型不同，而是采用逻辑流程图形式的数学模型。正是由于上述特点，使得模拟模型的计算与分析易于在计算机上实现，从而为模拟学与计算机的结合创造了必要的条件。

模拟模型的分类可以从不同的角度来考虑。例如可以从系统的状态特性来划分，也可以从系统的时间特性来划分，还可以从应用类型或模型结构形式来划分等等。其分类标准及其相应模型分别见表4-1。

表 4-1

分类标准	从系统的状态特性划分	从系统的时间特性划分	从模型的结构形式划分	从运筹学的应用范围划分
相应模型	确定性模型	离散性模型	简单式模型	存储模型
			串联式模型	排队模型
	随机性模型	连续性模型	扩展式模型	預测模型
			分析式模型	更新模型
				训练模型

（二） Buffon投针模拟的启示

为了搞清计算机模拟的概貌及其应解决的基本问题，下面我们来复习概率论中的著名问题：Buffon投针问题。

例4.1 在平面上画有等距为$2a$（$a>0$）的一些平行线，向平面任意投一长为$2L$（$L>a$）的针，试求针与平行线相交的概率。

解 Buffon投针问题是概率论中人们所熟知的一个例题，其求解的解析法也是大家所熟悉的。本章将其作为例题的目的不是来重复概率论中的解析方法，而是企图通过此例题来简要地说明在数字计算机模拟中随机模拟的基本思想与方法。在求解前首先需说明的是“任意投一长为$2L$的针”的含义是什么？这里“任意”二字是有其严格的概率意义的，我们用图4-1来说明。若X表示由针的中点到离它最近的一条平行线间的距离，φ是针与平行线构成的角度，那么X与φ两个参数就唯一决定了针落在平面上的位置。任投一针，这里面有三

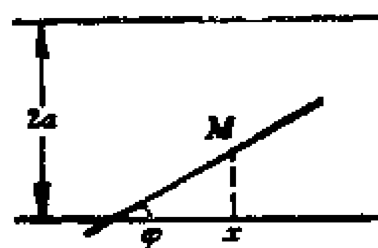


图 4-1

个意思：

（a）参数X随每次投针结果的不同而不同，即X是一个随机变量。具体地说X是在（0，a）范围内取值的均匀分布随机变量。

（b）针与平行线的夹角φ介于φ_1与$\varphi_1+\Delta\varphi$之间的概率与$\Delta\varphi$的大小成正比，且φ取值于（0，π）。这就是说，随机变量φ均匀分布于（0，π）区间上。

（c）X与φ是两个相互独立的随机变量。

满足上述三点的投针称为随机投针。下面我们通过三种不同的方法求解上述问题。

（1）分析法

由图4-1知针与平行线相交的充分必要条件为

$$X \leqslant L\sin\varphi \tag{4.1}$$

故我们的问题等价于在平面$xo\varphi$中之区域

$$G=\left\{(x,\ \varphi):\ \begin{matrix} 0\leqslant x\leqslant a \\ 0\leqslant \varphi\leqslant \pi \end{matrix}\right\}$$

内均匀分布地投点，求点落在区域

$$g=\left\{(x,\ \varphi):\ \begin{matrix} 0\leqslant x\leqslant L\sin\varphi \\ 0\leqslant \varphi\leqslant \pi \end{matrix}\right\}$$

内之概率（见图4-2）。由几何概率的基本原理知，此概率P等于图4-2中斜线区域面积与矩形面积之比，即有

$$P=\frac{\int_0^{\pi} L\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{a\pi}=\frac{2L}{a\pi}$$

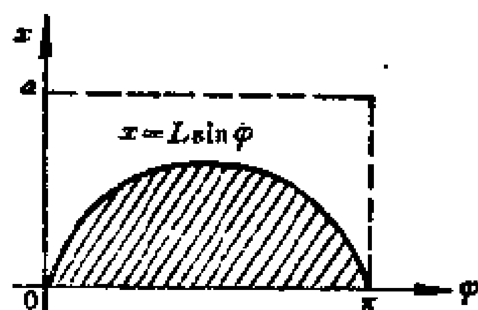


图 4-2

显然如果能够先求得P，那么即可由上式获得

$$\pi=2L/(aP) \tag{4.2}$$

（2）实物模拟法

实物模拟法的理论依据是Bernoulli大数定律，若设H是N次Bernoulli试验中事件A出现的次数，而P是事件A在每次试验中出现的概率，则对任意$\varepsilon > 0$，都有：

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{\left|\frac{H}{N} - P\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

即事件A出现的频率H/N依概率收敛于概率P（也可用强大数定律）。

由此可知，我们只需作一系列独立重复试验（即投针），并记录下投针的次数N及针与直线相交的次数H，则当N充分大时，即可用频率H/N来作为概率P的渐近估计值：$H/N \approx P$，并由（4.2）式可得π的估计值$\pi \approx 2LN/aH$。历史上曾经进行过不少次这样的试验，取得了很好的结果。现列表如下。

表 4-2

实验者	年份	针长 $2L$	半间距 a	理论值 P	投掷次数 N	相交次数 H	估计值 $\hat{P}$	$\hat{\pi}$
Wolf	1850	0.8	0.5	0.5093	5000	2532	0.5064	3.1596
Smith	1855	0.6	0.5	0.3819	3204	1218.5	0.3803	3.1554
DeMorgan. c.	1860	1.0	0.5	0.6366	600	382.5	0.6375	3.137
Fox	1884	0.75	0.5	0.4774	1030	489	0.4747	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	0.5	0.5284	3408	1808	0.5305	3.1415929
Reina	1925	0.5419	0.5	0.3450	2520	859	0.3480	3.1795

如果我们对人工模拟的实验方法进一步研究，发现其实施步骤（程序）具有严谨的逻辑性（见图4-3）。遗憾的是用人工的方法来实现随机投针实验是十分原始而又吃力的，往往稍不注意就将导致整个实验的失败。

随着电子计算机应用的日益广泛与深入，人们设想能否将上述的“随机投针”数字化，而保留其严谨的逻辑性。亦即将“随机

投针”这一吃力的工作交给电子计算机去做，这样就可以在很短的时间内完成成千上万次“投针试验”，从而轻松地解决上述问题。

（3）计算机模拟法

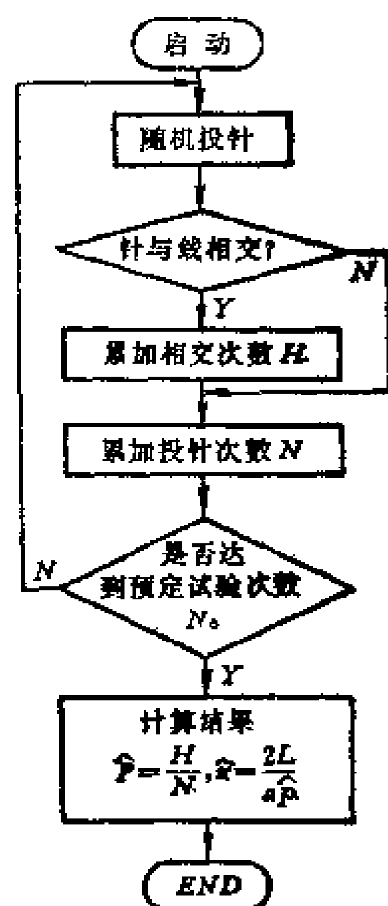


图 4-3

根据上述设想，要使电子数字计算机模拟随机投针，首先必须将随机投针数字化。那么，什么是随机投针的数字化呢？考虑到投针的效果无非表现在针落在相对于平行线的某个位置上，而这个位置显然可用一个数对(x，φ）来表示。因此，所谓投针数字化，其实质就是用一定的方法来产生随机变量x和φ的抽样序列$\{x_i, \varphi_i\}$($i=1, 2, \cdots$)。当然，对这个序列的要求是，它们必须满足前面关于随机投针的三点要求。因此，只要获得了这样的抽样序列，就意味着得到了一系列的投针结果。于是根据投针结果（x_i，φ_i），就不难用式（4.1）来判断针是否与平行线相交了。如果我们获得了N对投针结果（x_i，φ_i），$i=1, \cdots, N$，而用式（4.1）判断的结果是共发生了H次相交，那么H/N就可以作为针与平行线相交的概率的渐近估计值。

上述随机变量x和φ的抽样序列（x_i，φ_i）称为随机数。由于x的取值范围是（0，a），φ的取值范围是（0，π），并且它们都服从均匀分布律，因此我们就称x_i为取值（0，a）的均匀分布随机数。而φ_i则称为取值（0，π）的均匀分布随机数。在各种分布的随机数中，（0，1）范围上均匀分布的随机数是

最基本的，只要获得了（0，1）上均匀分布随机数，其他各种分布的随机数也就很容易得到(本章第二节将介绍有关原理)．因此，在许多数字电子计算机的算法语言中，都设有随机数函数，为使用者提供了很大的方便．例如在BASIC语言中，有随机数函数RND(x)，式中x可以是任何一个数或任何一个有定义的变量．在程序中，只需书写下述赋值语句：

LET　$X=2*$RND(1)　　(4.3)

LET　$Y=3.14159*$RND(6)

则计算机执行一次式（4.3）之程序即可产生一对满足上述要求的随机数（x_i，φ_i）(至于产生随机数的方法，我们将在后面作概要的介绍)。

将人工模拟法的程序框图4-3加以“数字化”，即可获得计算机模拟的程序框图4-4。

为了观察模拟结果与投针次数的内在联系，或模拟结果与理论值的偏差$P-\hat{P}$与投针次数N的依赖关系及其发展趋势，我们在程序中应计算出理论值$P=2L/(a\pi)$，然后每增加1000次投针就输出一次结果，总共输出100次结果，根据上述设想及框图4-4，容易写出Buffon投针试验的源程序如表4-3。

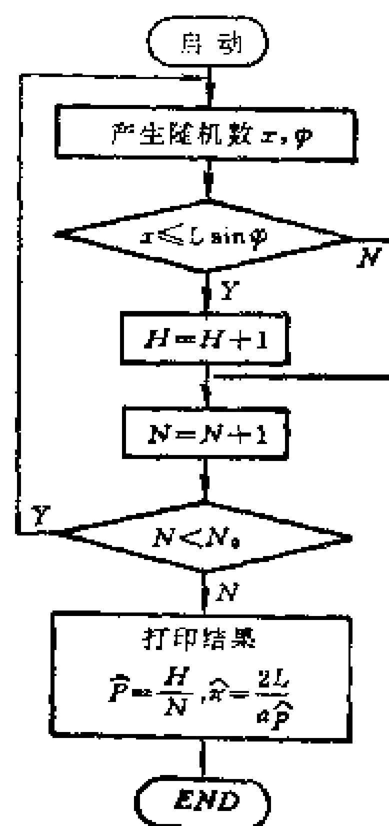


图　4-4

取$L=1$，$A=2$，执行上述源程序后即可得表4-4（表中之q即为$\hat{\pi}$）。由表4-4可画出图4-5．观察图4-5可知，在少量次数的模拟试验中，模拟值很不精确，且各次模拟解有较大的波动．然而随着模拟次数的增大，模拟值将越来越趋近于理论值

表 4-3

5	LPRINT "l, a"	50	LET Z=SIN (3.14159*RND(1))
10	INPUT L, A	55	IF X>L*Z GOTO 65
15	LET P=2*L/(3.14159*A)	60	LET H=H+1
20	LPRINT "P=", P	65	NEXT I
25	LPRINT "n", "P", "q", "p-h/n", "q-3.14159"	70	LET N=N+1000
30	LET N=0	75	LET Q=2*N*L/(A*H)
35	LET H=0	80	LPRINT N, H/N, Q, P-H/N, Q-3.14159
40	FOR i=1 TO 1000	85	IF N<1000001 THEN 40
45	LET X=A*RND(1)	90	END

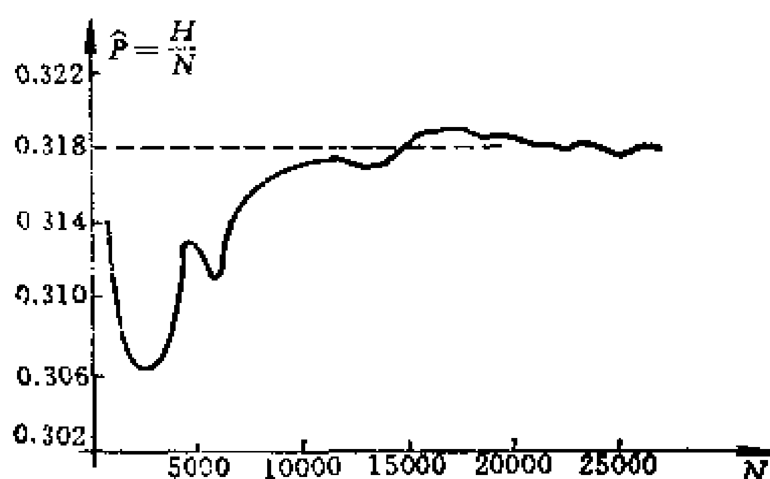


图 4 5

0.3183102，这就进一步从实践中证实了概率论中的著名定律—Bernoulli 大数定律。

通过 Buffon 投针问题的分析与求解，我们可以得到两点启示。

（1）随机性模型的计算机模拟法实质上是吸收了分析法与人工模拟法的两大优点：数量化与逻辑化发展而成的。它既弥补了分析法面对复杂系统而无能为力，也弥补了人工模拟法的笨拙落后；从而在计算机上为各种大型复杂的随机系统进行统计试验提供了一个理想的“试验场所”。因此计算机模拟法又称统计试验法或蒙特卡洛法（Monte-Carlo）。

表 4-4

$p=0.3183102$				
n	p	q	$p-h/n$	$q-3.14159$
1000	0.314	3.184713	4.310131E-03	4.312325E-02
2000	0.316	3.164557	2.310127E-03	2.296686E-02
3000	0.3083333	3.243243	9.976804E-03	0.1016551
4000	0.3065	3.262643	1.181015E-02	0.121052[illegible]
5000	0.313	3.194888	5.310148E-03	0.053298
6000	0.3115	3.210273	6.810129E-03	6.868267E-02
7000	0.315	3.174603	3.310144E-03	3.301311E-02
8000	0.315125	3.173344	3.185153E-03	3.175378E-02
9000	0.3171111	3.153469	1.199037E-03	1.187873E-02
10000	0.3178	3.146633	5.101562E-04	5.04303E-03
11000	0.3174546	3.150057	8.555949E-04	8.467198E-03
12000	0.3173334	3.151261	9.768009E-04	9.670496E-03
13000	0.3156154	3.168414	2.694756E-03	2.682328E-02
14000	0.3170715	3.153864	1.238704E-03	1.227331E-02
15000	0.3180667	3.143995	2.43485E-04	2.404928E-03
16000	0.3195625	3.129279	-1.252353E-03	-0.0123117
17000	0.3194706	3.130179	-1.160443E-03	-1.141143E-02
18000	0.3206111	3.119044	-2.300978E-03	-2.254653E-02
19000	0.3196842	3.128087	-1.374066E-03	-1.350308E-02
20000	0.3202	3.123048	-1.889855E-03	-1.854205E-02
21000	0.3192381	3.132458	-9.279549E-04	-9.131908E-03
22000	0.3185909	3.138822	-2.807677E-04	-2.768517E-03
23000	0.3183913	3.140789	-8.115173E-05	-8.00818E-04
24000	0.319	3.134796	-6.898642E-04	-6.793976E-03
25000	0.31956	3.129303	-1.24985E-03	-1.228738E-02

（2）为了对随机性模型作模拟试验，必须解决如下问题：对于给定概率特性的随机变量与随机过程，应如何取得其模拟试验后的样本值？考虑到解决上述问题的基础是如何取得在(0，1)上均匀分布随机变量的样本值问题，这就是伪随机数的产生问题。

（三）伪随机数及其产生方法介绍

具有$F(x)$分布随机变量的一列独立样本值称为$F(x)$随机数。例如，具有正态分布律随机变量的一列独立样本值称为正

态随机数，具有负指数分布律随机变量的一列独立样本值称为负指数分布随机数等等。在众多的具有各种分布的随机数中，最基本的是（0，1）均匀分布随机数，故它又简称为随机数。

随机数可以通过在计算机上附加一些物理设备来产生，这种设备称为随机数发生器。例如，以放射性物质为随机源的放射型随机发生器或以晶体管、电子管的固有噪声为随机源的噪声型随机发生器等。它们都是将具有随机性质的物理过程转变为随机数的物理设备。使用物理随机数发生器，尽管能得到真正的随机数，但也存在很多缺陷，如经常需要对设备进行检查与维修，在数字处理与数值计算上无法对所模拟的问题进行复核与检查等。因此，在进行随机性模型模拟时，人们通常采用在数字计算机上产生伪随机数的方法。所谓伪随机数就是在数字计算机上采用某种完全确定的规则，通过递推运算而产生的一列数。这一列数虽然不是由真实的随机现象所产生的，因而不是真正的随机数，但由于这种数列具有类似于随机数的统计性质，因此，可以把它当作随机数来运算，故这种数列就称为伪随机数。

产生伪随机数的方法很多，一般来说应满足如下要求：（1）具有较好的随机性与均匀性；（2）产生伪随机数的速度要快；（3）算法程序应尽量少占用内存单元；（4）一批随机数的周期尽可能长。

由于计算机自行产生的伪随机数具有迅速、可靠、费用少等优点，因此，在随机性模型模拟中得到广泛的应用。目前大多数计算机中均配备有能自行产生伪随机数的BASIC语言程序，可供使用者方便地选取，故有关产生伪随机数的算法及其原理在此从略，以下只介绍一下运用随机数函数来获得伪随机数的方法。

在BASIC语言中，一般均配有随机函数RND(x)，其中x是任何一个数或任何一个有定义的变量，例如RND(6)，RND(1)，RND(A)(其中A已赋值）等。当人们需要产生一个伪随机数并将其存于A单元时，只需书写下述BASIC语言程序：

```
LET  A = RND(1)
```

当计算机执行一次上述程序时，即可将满足上述要求的伪随机数存于A单元。显然这对于使用者来说是极其方便的。

§4.2 随机变量的模拟

由前可知，当人们运用统计试验法来求解随机性模型的有关问题时，经常需要获得具有各种分布律$F(x)$的随机变量的样本值（$F(x)$随机数）。诚然，这些样本可以通过真实试验来获得，但那样作将耗费大量的人力、物力和财力。因此，人们常采用另一条间接的然而更为有效的途径来取得这些样本。这种途径的基本思想是，首先在计算机上产生伪随机数r，然后构造一个概率模型，使r经过概率模型的转换后便可成为给定要求的$F(x)$随机数。这种概率模型的转换形式很多，但常用的有两种形式：一种是采用伪随机数的函数形式，即$f(r)$形式（又称为抽样公式）；另一种是对r作一系列算术运算与逻辑判断。下面我们分别就事件A的模拟，离散型随机变量的模拟及连续型随机变量的模拟等方面，介绍这两种不同形式的转换方法（模拟方法）。

（一）随机事件与离散型随机变量的模拟

1. 随机事件的模拟

设事件A有给定的概率$P(A)=p$。所谓对事件A的模拟，其实质就是通过计算机上的模拟试验来取得A在真实试验下的试验结果——A发生或A不发生。实现对事件A模拟的方法如下：首先构造一个与事件A等概率的事件B，而$B=$“$R\leqslant p$”，其中R为（0，1）均匀分布随机变量；然后在计算机上产生R的样本值一伪随机数r，并通过观察不等式$r\leqslant p$是否成立来判定事件A的发生与否。上述构造的模型显然是合理的，这是因为

$$P(B)=P(R\leqslant p)=p=P(A)$$

即A与B等概率，因此在计算机上的一次模拟试验中，若不等式$r\leqslant p$成立，即B发生，便可认为事件A在一次真实试验中也发生。

2．离散型随机变量的模拟

设离散型随机变量η有分布列$P(\eta=x_i)=p_i$（$i=1$，2，…）。所谓对离散型随机变量η的模拟，其实质就是通过计算机上的模拟试验来取得η在真实试验下的样本值U（由分布列知U只能取数值x_1，x_2，…中的某一个）。对离散型随机变量η的一般模拟方法（即概率模型及其转换形式）如下：

（1）在直线上将〔0，1〕区间划分成若干个子区间，其分点记为A_1, A_2，A_3，…，A_n，…，并使分点A_i的坐标为$\sum\limits_{l=1}^{i} p_l$，（$i=1$，2，…，$n$，…）。详可见图4-6。

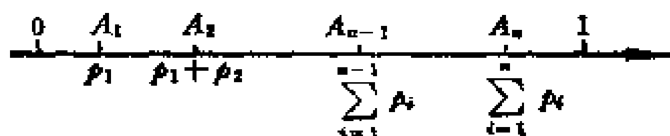


图 4-6

（2）在计算机上取伪随机数r。

（3）判定r在x轴上所落的位置，若$r\in\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, \sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right]$，则可以认为$\eta$的一次真实试验样本值取$x_n$。

采用上述概率模型及其转换形式（此处采用了数值计算与逻辑判断的转换形式）是有理论根据的，因为，

$$P\left(R\in\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i, \sum_{i=1}^{n} p_i\right]\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i < R \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n-1} p_i = p_n$$

由于事件"$R \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\right]$"与事件$\eta = x_n$等概率，即

$$P(\eta = x_n) = p_n = P\left(R \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\right]\right)$$

因此在模拟试验中，若事件"$R \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\right]$"发生，则可认为在真实试验中$\eta$取样本值$x_n$。

以上是对离散型随机变量的一般模拟方法，对于一些具特殊分布（如二点分布，几何分布，二项分布）的随机变量还可采用特殊的方法来处理。例如设随机变量η服从二项分布。有分布列

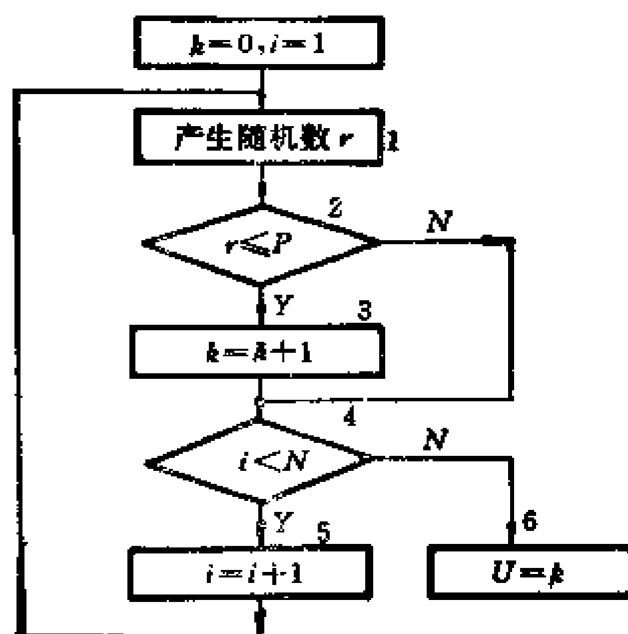


图 4-7

$P(\eta=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0, 1, \cdots, n$, $p>0$, $q>0$, $p+q=1$。若将 n 看作试验次数，则可将 η 看作 n 次独立 Bernoulli 试验中事件 A 的成功数，故 η 之随机数可按程序框图 4-7 产生。其中 k 表事件 A 的成功累计数，i 表试验累计数。

（二）连续型随机变量的模拟

设连续型随机变量 η 有分布函数 $F_\eta(x)=P(\eta\leqslant x)$, $-\infty<x<+\infty$。所谓对连续型随机变量 η 的模拟，其实质就是通过计算机上的模拟试验来取得 η 在真实试验下的样本值 U（U 可取 $(-\infty, +\infty)$ 中某一值）。常见的连续型随机变量模拟方法有逆变换法、变换法、近似法、舍选法等。下面我们将通过几种常见分布的连续型随机变量的模拟来介绍上述各方法的基本原理。

1. 逆变换法

逆变换法的基本原理为下述定理。

定理 4.1 若 $F(x)$ 为已知的连续分布函数，而 R 是在 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量，则随机变量 $\eta=F^{-1}(R)$ 将具有分布函数 $F(x)$，其中 $F^{-1}(y)=\inf\{t: F(t)\geqslant y\}$。

证明 若 $F(x)$ 为严格单调增并连续，则其反函数必存在，并且仍为严格单调增且连续，故知 $y=F(x)$ 的反函数 $x=F^{-1}(y)$ 存在、连续且严格单调增，从而易知 $\eta=F^{-1}(R)$ 为随机变量，且有

$$
\begin{aligned}
P(\eta\leqslant x)&=P(F^{-1}(R)\leqslant x)\\
&=P(R\leqslant F(x))=F(x)
\end{aligned}
$$

若 $F(x)$ 非严格单调增，则由 $F^{-1}(y)=\inf\{t: F(t)\geqslant y\}$ 的定义知上述结论仍成立。 □

例如，(a, b) 上均匀分布随机变量 η 的抽样公式为 $U=a+(b-a)r$，其中 r 为随机数，这是由于

$$P(\eta\leqslant x)=P(a+(b-a)R\leqslant x)$$

$$= P\left(R \leqslant \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a, \ b] \\ 1 & b < x \end{cases}$$

又例如参数为μ的负指数分布随机变量的抽样公式为

$$U = -\frac{1}{\mu}\ln r$$

或

$$U = -\frac{1}{\mu}\ln(1-r)$$

其中r为随机数。这是由于若

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geqslant 0$$

则有

$$F^{-1}(y) = \inf\{t : F(t) \geqslant y\} = -\frac{1}{\mu}\ln(1-y)$$

$$0 \leqslant y \leqslant 1$$

由定理4.1知$\eta = -\frac{1}{\mu}\ln(1-R)$具有负指数分布，从而其抽样公式为

$$U = -\frac{1}{\mu}\ln(1-r)$$

其中r为R的样本值。

此外由于考虑到$1-R$仍在（0，1）上均匀分布，故抽样公式亦可写成

$$U = -\frac{1}{\mu}\ln r$$

采用类似的方法还可以得到k阶Erlang分布及Weibulle分布随机变量的抽样公式，详可见表4-5。

逆变换法是一种较为普遍的方法，但当反函数不存在或难以求出时，逆变换法就难以使用，因而必须去探讨其他的模拟方法。

2. 变换法

变换法无需去求解分布函数的反函数，而直接通过对（0，1）均匀分布随机变量R的变换来求得某些具有已知分布的随机变量的抽样值。例如，生成一对$N(0,1)$分布随机变量的抽样公式可取为

$$U_1=\sqrt{-2\ln r_1}\cos 2\pi r_2$$
$$U_2=\sqrt{-2\ln r_1}\sin 2\pi r_2$$

其原理为下述定理。

定理 4.2 若R_1，R_2是相互独立且在（0，1)上均匀分布的随机变量，则

$$\begin{cases}\xi=\sqrt{-2\ln R_1}\cos 2\pi R_2\\ \eta=\sqrt{-2\ln R_1}\sin 2\pi R_2\end{cases}$$

是相互独立且同具有$N(0,1)$分布的一对随机变量。

证明 设二元随机变量(R_1,R_2)的联合密度为

$$P(x,y)=P_1(x)P_2(y)$$
$$=\begin{cases}1 & 0\leqslant x,\ y\leqslant 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

二元随机变量(ξ,η)的联合密度为$g(R,S)$。

由于

$$R=\sqrt{-2\ln x}\cos 2\pi y$$
$$S=\sqrt{-2\ln x}\sin 2\pi y$$

变换的 Jacobi 行列式为

$$J=-\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2+S^2}{2}}$$

故有

$$g(R,S)=P(x,y)|J|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2+S^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{R^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{S^2}{2}}$$

从而得知ξ与η确为相互独立且同具有$N(0, 1)$分布的一对随机变量。 □

利用变换法的思想及概率论中的有关定理还可得到χ^2分布、t分布等随机变量的抽样公式，详见表 4-5。

3. 近似法

利用同分布中心极限定理，当N较大时，可以获得$N(0, 1)$分布随机变量的近似抽样公式

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

其中r_i为随机数。这是由于R_1，R_2，…，R_n独立同分布（具有$(0, 1)$均匀分布），且$E(R_i) = \frac{1}{2}$，$D(R_i) = \frac{1}{12}$。故知有

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

渐近$N(0, 1)$分布。

若特殊地取$n = 12$，则有抽样公式

$$U_{12} = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6$$

容易推得$N(\mu, \sigma^2)$分布随机变量的抽样公式为

$$U_n = \mu + \sigma \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

近似法的优点是方法简单，但采用此法所得的随机数实际上为近似正态分布，有一定误差，因为

$$-\sqrt{3n} \leqslant U_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i - n/2}{\sqrt{n/12}} \leqslant \sqrt{3n}$$

4. 舍选法

舍选法的基本思想是通过对某些给定的判别准则来确定所产生的随机变量是否具有已知的分布，并进而决定对所产生的随机数的取舍。由于舍选法方式灵活、计算简单、使用方便，从而得到了较为广泛的应用。下面我们介绍两种常用的舍选方法。

舍选法 I：主要适用于密度集中在有限区间上的随机变量。

设随机变量 ξ 定义在有限区间（a，b）上，并有 $M = \sup\limits_{x \in (a, b)} f(x) < \infty$，则 ξ 之随机数可按下述步骤获得：首先产生随机数 r_1，r_2，然后判断不等式 $\frac{1}{M} f(a+(b-a)r_1) \geqslant r_2$ 是否成立？若成立，则 $U = a+(b-a)\cdot r_1$，即 U 为以 $f(x)$ 为密度的随机数；否则再产生一对新随机数 r_1，r_2，如此循环反复，直到使上述不等式成立为止。其程序框图可见图 4-8。至于其基本原理可见下述定理。

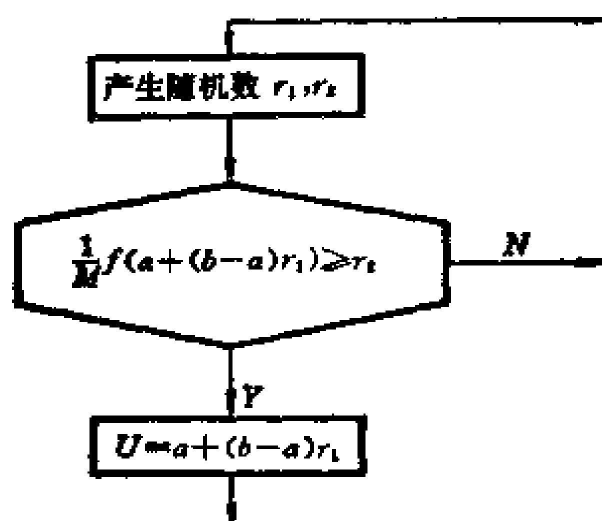


图 4-8

定理 4.3 设 $f(x)$ 是集中于（a，b）的密度函数，η 与

R是两个相互独立的随机变量，且η在(a, b)上均匀分布，R在$(0, 1)$上均匀分布。任取$\alpha>0$，使$\alpha f(x)\leqslant 1$对于一切$x\in(a, b)$成立，则有$P(\eta\leqslant t|\alpha f(\eta)\geqslant R)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x(a\leqslant t\leqslant b)$，即在条件$\alpha f(\eta)\geqslant R$具备时，$\eta$以$f(x)$为密度。

证明 设(η, R)的联合密度为$g(x, y)$，则有

$$P(\eta\leqslant t|\alpha f(\eta)\geqslant R)=\frac{P(\eta\leqslant t, \alpha f(\eta)\geqslant R)}{P(\alpha f(\eta)\geqslant R)}$$

$$=\frac{\int_a^t \mathrm{d}x\int_0^{\alpha f(x)}\frac{1}{b-a}\mathrm{d}y}{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{\alpha f(x)}\frac{1}{b-a}\mathrm{d}y}$$

$$=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$ □

其中需说明的是定理条件$\alpha f(x)\leqslant 1$的重要性，因为对$x\in(a, b)$若有$\alpha f(x)>1$，则有

$$P(\alpha f(\eta)\geqslant R)=\iint\limits_{\alpha f(x)\geqslant y\geqslant 0} g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\frac{1}{b-a}\int_0^1\mathrm{d}y\mathrm{d}x=1$$

从而使

$$P(\eta\leqslant t|\alpha f(\eta)\geqslant R)=\int_a^t\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x\Big/\int_a^b\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{t-a}{b-a}$$

这样就无法得出定理结论。

显然，舍选法Ⅰ不能保证每选一对随机数后都能获得$f(x)$随机数，其选一次成功的概率为

$$P\left(R_2\leqslant\frac{1}{M}f(a+(b-a)R_1)\right)$$
$$=\frac{1}{M(b-a)},\quad\left(M=\frac{1}{\alpha}\right)$$

它称为舍选法Ⅰ的效率。显然，由上式可知，M 愈小，效率愈高，但注意到有题设条件 $\alpha f(x)\leqslant 1$ 或 $f(x)\leqslant M$、故通常取

$$M=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=\frac{1}{\alpha}$$

例如，设 η 具有 β 分布，则 η 的抽样值可由图 4-9 得到。这是由于 η 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(p,\ q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 p、$q\geqslant 1$，$B(p,\ q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

考虑到 η 为集中于（0，1）的密度函数，且$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)$

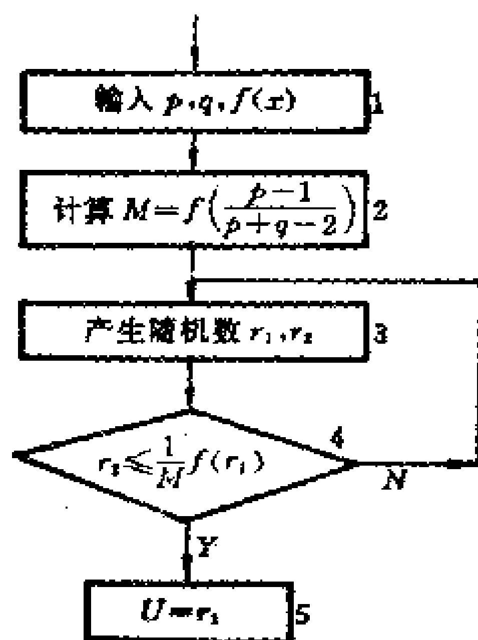


图 4-9

$= f((p-1)/(p+q-2))$，故利用定理 4.3 的原理，η 的抽样值可由程序框图 4-9 得到。

舍选法 Ⅱ：又称 Box-Muller 算法。利用该算法可产生一对相互独立的正态分布 $N(0, 1)$ 随机数。

该算法的基本原理可见下述定理 4.4，根据定理 4.4 可以得到产生一对相互独立的 $N(0, 1)$ 随机数的程序框图 4-10。

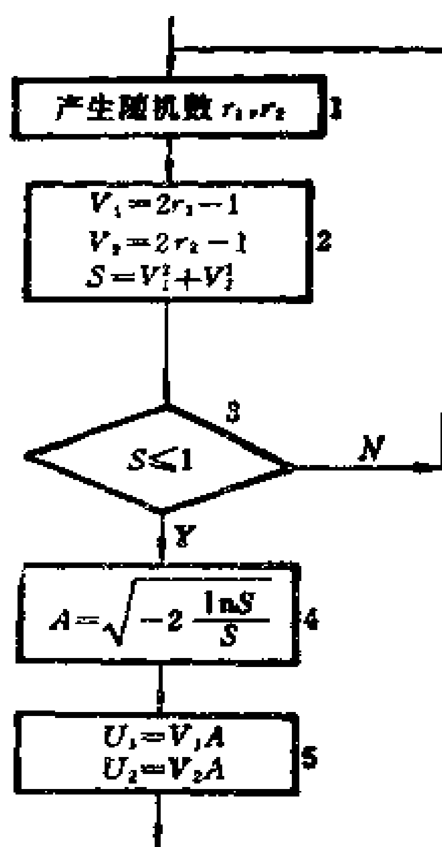


图 4-10

定理 4.4 设 R_1、R_2 是相互独立并在 $(0, 1)$ 均匀分布的随机变量，作 $V_1=2R_1-1$，$V_2=2R_2-1$ 及 $S=V_1^2+V_2^2$，若 $S\leqslant 1$，则 $\xi=V_1\sqrt{-2\ln S/S}$ 与 $\eta=V_2\sqrt{-2\ln S/S}$ 为一对相互独立的 $N(0, 1)$ 随机变量。

证明 考虑到 $0\leqslant R_1$，$R_2\leqslant 1$，故由几何概率可知有

$$P(S\leqslant 1)=P(V_1^2+V_2^2\leqslant 1)$$
$$=P((2R_1-1)^2+(2R_2-1)^2\leqslant 1)$$

$$= P\left(\left(R_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(R_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\right)$$

$$= \pi / 4$$

由于$\begin{cases} V_1 = 2R_1 - 1 \\ V_2 = 2R_2 - 1 \end{cases}$ 故知 V_1 和 V_2 均在（-1，1）上均匀分布，现对 V_1，V_2 作变换

$$\begin{cases} \alpha = V_1\sqrt{-2\ln S/S} \\ \beta = V_2\sqrt{-2\ln S/S} \end{cases}$$

其中 $S = V_1^2 + V_2^2$。并考虑到变换的 Jacobi 行列式为

$$J = -S/2 = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$$

则有 $P(\xi \leqslant x,\ \eta \leqslant y,\ S \leqslant 1) = P(V_1\sqrt{-2\ln S/S} \leqslant x,$ $V_2\sqrt{-2\ln S/S} \leqslant y,\ S \leqslant 1) = \iint\limits_{\substack{\alpha \leqslant x \\ \beta \leqslant y}} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta$

$$= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta$$

从而有

$$P(\xi \leqslant x,\ \eta \leqslant y \mid S \leqslant 1)$$

$$= P(\xi \leqslant x,\ \eta \leqslant y,\ S \leqslant 1) / P(S \leqslant 1)$$

$$= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \Big/ \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta$$

此即说明在条件 $S \leqslant 1$ 满足的前题下，ξ 与 η 是一对相互独立的 $N(0,\ 1)$ 随机变量。 □

表 4-5 列出了一些常用分布的随机变量的抽样公式。读者容

易验证其抽样的正确性。

表 4-5

分布名称	分 布 密 度	抽样公式	注
(a, b) 均匀分布	$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{1}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x\end{cases}$	$a+(b-a)r$	r为伪随机数
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$	$V=\mu+\sigma\left(\sum_{i=1}^{12} r_i-6\right)$	r_i为伪随机数 $i=1,\cdots,12$
负指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$V=-\frac{1}{\lambda}\ln r$	r为伪随机数
k阶爱尔兰分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}, & x>0, \lambda>0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\ln r_i$	r_i为伪随机数 $i=1, 2, \cdots, k$
对数正态分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$		V为 $N(\mu, \sigma^2)$ 随机数
威布尔分布	$f(x)=\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}$ $x\geqslant 0$, $\alpha>0$, $\beta>0$	$\left[-\frac{1}{\alpha}\ln(1-r)\right]^{1/\beta}$	r为伪随机数
瑞利分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $\sigma>0$	$\sqrt{V_1^2-V_2^2}$	V_1与V_2均为 $N(0, \sigma^2)$ 随机数

例 4.2 （公园射击游戏模拟）

某公园管理站经营射击游戏台，每个游客只需交纳 0.25 元，即可向某种陶质玩具射击三次。若设每个游客在每次射击时击中概率均为 0.5，而一发子弹击中玩具，该玩具因破裂而损失 0.04 元，若连续三次均击中，则公园管理站应给游客价值为 1 元的奖品，试求当 500 个游客射击后，该公园管理站所得的平均赢利。

解 若设 η 表每个游客在三次射击中击中目标的次数，由于各次射击相互独立，故由 Bernoulli 试验的结果可知 η 有分布列，

η	0	1	2	3
P_k	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$	$C_3^1 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

对于 η 的各状态，公园管理站对每个游客的赢利相应为

η	0	1	2	3
S	0.25	0.25－0.04	0.25－0.08	0.25－0.12－1

故公园对每个游客的平均赢利为

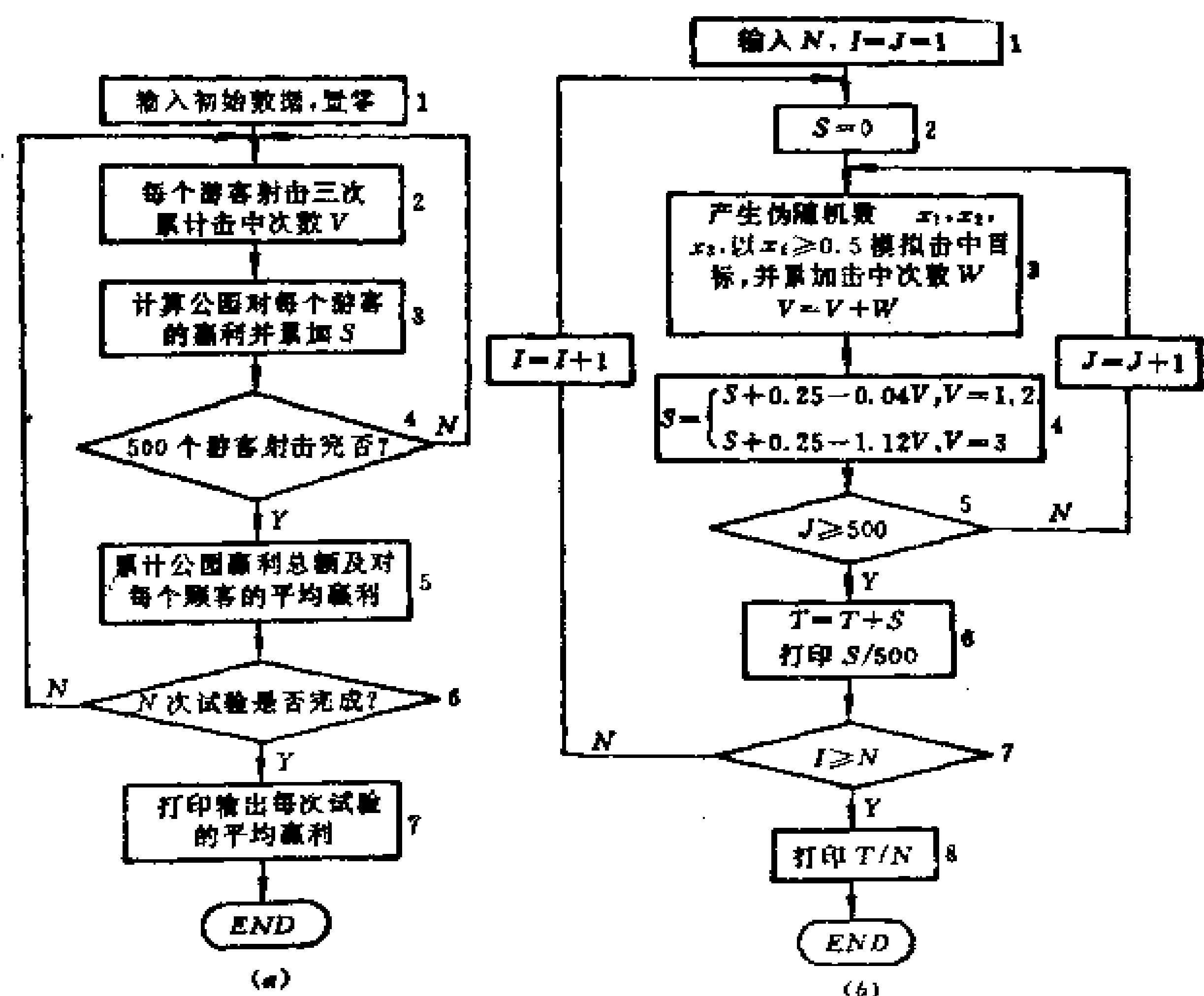


图 4-11

$$E(S)=\sum_i S_iP(S=S_i)=\sum_i S_iP(\eta=\eta_i)$$

$$=\frac{0.25}{8}+\frac{3}{8}\times 0.21+\frac{3}{8}\times 0.17-\frac{1}{8}\times 0.87$$

$$=0.065(\text{元})$$

从而当 500 个游客射击后，公园的平均赢利为

$$500E(S)=32.5\ \text{元}$$

以上为分析解，本题若采用模拟解，则在每一次试验中，可用连续产生三个伪随机数 r，并用 $r\geqslant 0.5$ 来模拟每一游客一次射击时击中目标，然后累加击中的次数，计算出对该游客的赢利数。如此反复模拟 500 个游客的射击状况，即可计算出该次试验中，公园管理站对 500 个游客的总赢利。为提高模拟精度，最后还可连续进行如上的 N 次试验，并取此 N 次试验的算术平均值来作为本问题的模拟解。上述模拟的程序框图详见图 4.11，对应的程序见表 4-6。输入 $N=1000$ 并执行上述程序可得模拟解 33.1825。由此结果可知模拟解为近似解，其相对误差为 2.1%。

表 4-6

5	RANDOMIZE		
10	INPUT "NUMBERS OF PLAYERIS"; N	120	V = V + W
20	LPRINT "N ="; N	130	NEXT K
30	T = 0	140	Y = 0.04 * V
40	FOR I = 1 TO N	150	IF V = 3 THEN Y = 1.12
50	S = 0	160	S = S + 0.25 - Y
60	FOR J = 1 TO 500	170	NEXT J
70	V = 0	180	LPRINTI, S, S/500
80	FOR K = 1 TO 3	190	T = T + S
90	X = RND(K)	200	NEXT I
100	W = 0	210	LPRINT "T ="; T/N
110	IF X>= 0.5THEN W = 1	220	END

§4.3* 随机过程的模拟

(一) n 维随机向量的模拟

设 n 维随机向量 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 具有分布密度 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。若 η 的各分量相互独立，则可利用 §4.2 中给出的各种不同抽样方法，对分量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 分别独立地进行抽样，即可获得 η 的抽样值。但在很多实际问题中，η 的各分量往往是相关的，因此其抽样方法就要复杂、困难一些。下面我们将分别介绍随机向量的一般抽样方法以及一些常用随机向量尤其是正态向量的抽样方法。

1. 随机向量的一般抽样方法

在随机向量的模拟中，常用的模拟方法有条件密度法、舍选法和函数变换法等。它们大都是 § 4.2 中随机变量模拟方法向多维的推广。为简单计，下面以三维随机向量为例来讨论随机向量的一般模拟方法，至于向更高维向量推广时，其方法是类似的。

(1) 条件密度法。 其基本思想是将一个 n 维向量的模拟问题转化成 n 个一元随机变量的模拟问题，从而可直接用 § 4.2 的方法来解决多维向量的模拟问题。

设随机向量 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 的联合密度为 $f(x, y, z)$，则随机变量 η_1, η_2, η_3 分别有边际密度函数和条件密度函数：

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$f(y|x)=f_2(x, y)/f_1(x)$$

其中

$$f_2(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\mathrm{d}z$$

$$f(z|x, y)=f(x, y, z)/f_2(x, y)$$

即有

$$f(x,\ y,\ z)=f_1(x)f(y|x)f(z|x,\ y)$$

这样，一个具有分布密度$f(x,\ y,\ z)$的三维向量$\eta=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$可用三个分量相互独立的三维随机向量$(U_1,\ U_2,\ U_3)$来模拟，其中$U_1$，$U_2$，$U_3$分别具有密度函数$f_1(x)$，$f(y|x)$，$f(z|x,\ y)$。于是三维向量$\eta=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$的抽样值可通过如下过程来实现：首先产生无条件分布$f_1(x)$随机数$r_1$，然后以$x=r_1$代入条件分布$f(y|x)$，接着产生分布$f(y|r_1)$随机数$r_2$，最后以$x=r_1$，$y=r_2$代入条件分布$f(z|x,\ y)$，并产生分布$f(z|r_1,\ r_2)$随机数$r_3$。这样，$(r_1,\ r_2,\ r_3)$即可认为是具有分布$f(x,\ y,\ z)$的随机向量$(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$的抽样值。上述算法的程序框图见4-12。

（2）舍选法　随机向量的舍选法是一维随机变量舍选法的直接推广，下面我们讨论其中最简单的一种情形。

设随机向量η定义在平行多面体$a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$，$(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$上，具有密度函数$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，且其上界

$$f_0=\sup_{\substack{a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\\ i=1,\ \cdots,\ n}} f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

取有限值。此时可有与§4.2类似的模拟方法：首先产生$n+1$个随机数r_0，r_1，r_2，$\cdots$，r_n，然后判断不等式

$$f_0r_0\leqslant f(a_1+(b_1-a_1)r_1,\ \cdots,\ a_n+(b_n-a_n)r_n)$$

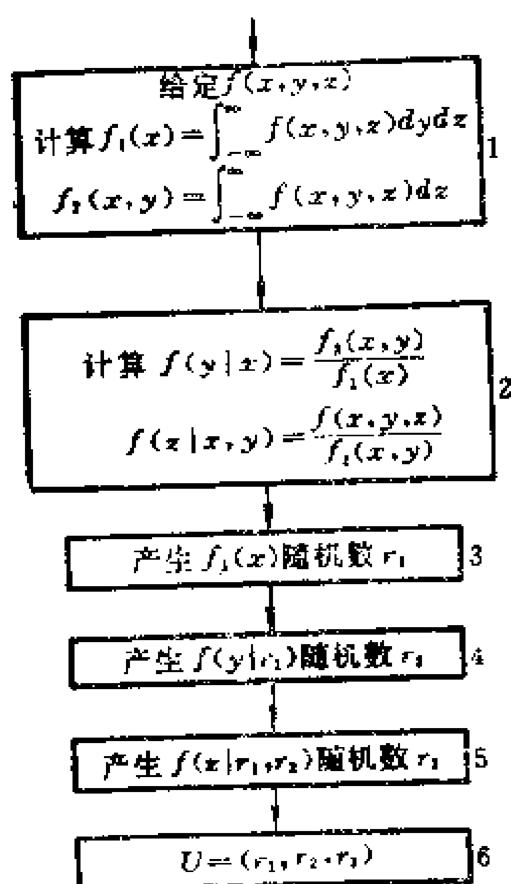
是否成立，若上述不等式成立，则取

$$U=(a_1+(b_1-a_1)r_1,\ \cdots,\ a_n+(b_n-a_n)r_n)$$

此时，可以证明舍选抽样的效率为

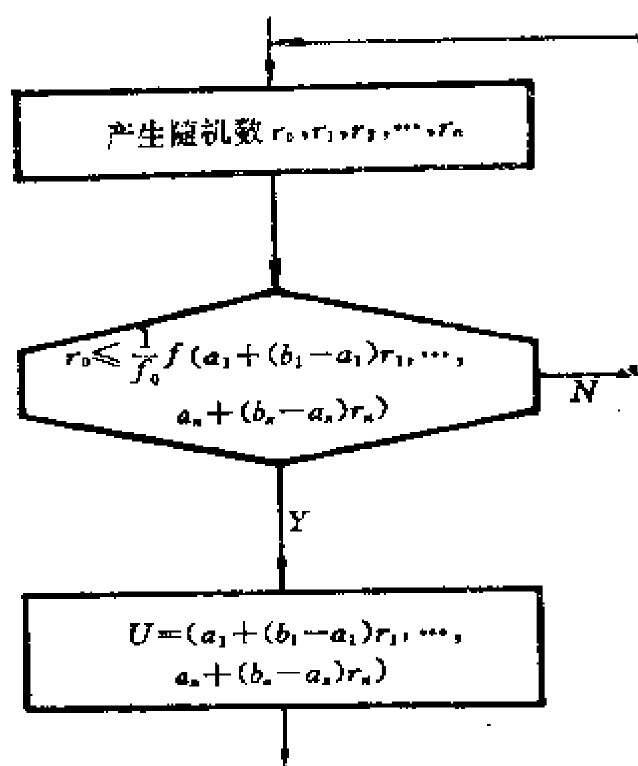
$$\alpha=\frac{1}{f_0\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)}$$

α将随着维数的增加而急剧下降，故此方法一般来说效率低。



给定$f(x,y,z)$
计算$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)dydz$
$f_2(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)dz$
1
计算 $f(y|x)=\frac{f_2(x,y)}{f_1(x)}$
$f(z|x,y)=\frac{f(x,y,z)}{f_2(x,y)}$
2
产生$f_1(x)$随机数r_1
3
产生$f(y|r_1)$随机数r_2
4
产生$f(z|r_1,r_2)$随机数r_3
5
$U=(r_1,r_2,r_3)$
6

图 4-12



产生随机数$r_0,r_1,r_2,\cdots,r_n$
$r_0\leqslant\frac{1}{f_0}f(a_1+(b_1-a_1)r_1,\cdots,$
$a_n+(b_n-a_n)r_n)$
N
Y
$U=(a_1+(b_1-a_1)r_1,\cdots,$
$a_n+(b_n-a_n)r_n)$

图 4-13

上述模拟方法的程序框图见图4-13，至于此方法的基本原理与一维情况完全类似，在此从略。

（3）n维正态向量的模拟。设$\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$为具有均值$\mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$，协方差矩阵$B_\xi=(b_{ij})_{n\times n}$的$n$维正态向量，其中$B_\xi$为$n$阶正定对称矩阵。下面我们来考虑对此$n$维正态向量的模拟问题。其基本思想是将一个$n$维向量的模拟问题转化为$n$个一元随机变量的模拟问题。基本作法如下：

首先，取n个相互独立的一元标准正态随机变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$，作三角形变换。

$$\eta_1=\mu_1+c_{11}y_1$$

$$\eta_2=\mu_2+c_{21}y_1+c_{22}y_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\eta_n=\mu_n+c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n$$

若设

$$\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T,$$

$$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T,$$

$$\mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots\mu_n)^T$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \cdots 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \cdots \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ & & 0 \\ c_{n1} & \cdots\cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

则有

$$\eta=\mu+Cy$$

考虑到B_ξ为正定对称阵，故由矩阵知识知，选取这样的下三角矩阵C，且使$C\cdot C^T=B_\xi$，是可以做到的。由于η是经正态向量y线性变换而得，故η仍为正态向量，并可证有

$$E(\eta)=E(\mu+Cy)=\mu=E(\xi)$$

η的协方差矩阵$B_\eta=B_\xi$，这是由于考虑到y_i为相互独立的

$N(0, 1)$ 随机变量，故有

$$E(y_i y_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

从而有

$$\begin{aligned}B_\eta &= E[(\eta-\mu)(\eta-\mu)^T]\\ &= E[(Cy)(Cy)^T]\\ &= CE(yy^T)C^T\\ &= C\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}C^T\\ &= CC^T=B_\xi\end{aligned}$$

由概率论知 n 维正态向量有分布密度 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T B^{-1}(x-\mu)\right]$

显然，此分布由一阶矩与二阶矩唯一决定。由于我们证明了标准正态向量 y 经三角形变换后所得的 n 维向量 η 与 n 维正态向量 ξ 有相同的期望和协方差，从而必有相同分布。因此用 η 作为 ξ 的模拟向量是合适的。考虑到 y 是由相互独立的 $N(0, 1)$ 随机变量构成，这样就使得一个 n 维随机向量的模拟问题转化为 n 个一元 $N(0, 1)$ 随机变量的模拟问题，因而可用 § 4.2 的方法来求解。

在上述方法的构思中还有一个问题需要说明，这就是为使下三角矩阵 C 满足等式 $CC^T=B_\xi$，此 C 应如何求？下面，我们以 $n=3$ 为例来说明此下三角阵 C 的求法。

考虑到 B_ξ 为对称矩阵，且有 $C\cdot C^T=B_\xi$。即有

$$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & 0 & 0\\ c_{21} & c_{22} & 0\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{21} & c_{31}\\ 0 & c_{22} & c_{32}\\ 0 & 0 & c_{33}\end{pmatrix}$$

从而有：

$$b_{11}=c_{11}^2$$
$$b_{21}=b_{12}=c_{11}c_{21}$$
$$b_{31}=b_{13}=c_{11}c_{31}$$
$$b_{22}=c_{21}^2+c_{22}^2$$
$$b_{32}=b_{23}=c_{21}c_{31}+c_{22}c_{32}$$
$$b_{33}=c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2$$

于是可得

$$c_{11}=\sqrt{b_{11}}$$
$$c_{21}=b_{12}/\sqrt{b_{11}}$$
$$c_{31}=b_{13}/\sqrt{b_{11}}$$
$$c_{22}=\sqrt{b_{22}-b_{12}^2/b_{11}}$$
$$c_{32}=\left(b_{23}-\frac{b_{12}b_{13}}{b_{11}}\right)\Big/\sqrt{b_{22}-b_{12}^2/b_{11}}$$
$$c_{33}=\sqrt{b_{33}-\frac{b_{13}^2}{b_{11}}-\frac{\left(b_{23}-\frac{b_{12}b_{13}}{b_{11}}\right)^2}{b_{22}-b_{12}^2/b_{11}}}$$

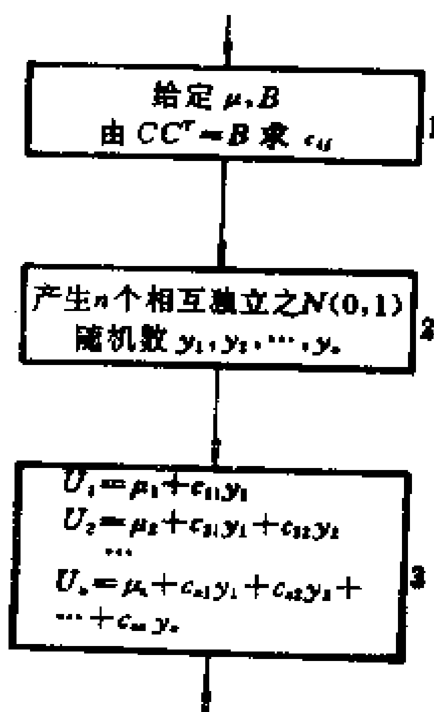


图 4-14

综合上述，可画出该算法的程序框图4-14。

上述算法为 n 维正态向量的一般模拟方法，对于一些特殊的 n 维正态向量，其算法可以更为简便，详可参阅文献〔8〕。

（二）Poisson流的模拟

一列相继到达某目标的顾客流称为流密度为 λ 的 Poisson 流是指它满足附录二定义7.3所述的性质。若以 $N(t)$ 表示在 $(0, t]$ 内到达目标的顾客数，则由定义知它应满足：

（1）在互不相交的时间区间内到达的顾客数是相互独立的；

（2）$P(N(\Delta t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，$\lambda>0$；

（3）$P(N(\Delta t)>1)=o(\Delta t)$，

所谓对 Poisson 流的模拟，其实质就是通过计算机上的模拟试验来获取顾客流的各相继到达时刻 s_1，s_2，…的样本值，或相继到达时间间隔 τ_1，τ_2，…的样本值，其中 s_n 为第 n 个顾客到达目标的时刻，$\tau_n=s_n-s_{n-1}$。下面我们来介绍 Poisson 流模拟的三种不同方法，其中模拟方法Ⅰ的基础是 Poisson 流的定义，而模拟方法Ⅱ的基础是 Poisson 流的性质（2）。模拟方法Ⅲ的理论基础是定理2.22。

1. 模拟方法Ⅰ

为获得在区间〔0，T〕内各顾客相继到达的时刻 s_1，s_2，…的样本值，首先将〔0，T〕分成若干个小区间，其分点依次为 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T$，并使每一小区间的长度 $\Delta t=T/n$ 充分小。于是，由 Poisson 流的定义可知，在互不相交的上述各小区间内，顾客的到达是相互独立而彼此不受影响的。这样，在〔0，T〕内顾客到达状况的观察可分解为在上述各小区间内顾客到达状况的观察。由 Poisson 流定义还可知，在每一充分小的时间区间 $\Delta_n=(t_{n-1}, t_n]$（$n=1, 2, \cdots$）内，要么到达一个顾客，要么无顾客到达，而到达两个或两个以上顾客的情况是几乎不可能的。且到达一个顾客的概率 $P(A)$ 是已知的，即有

$$P(A)=P(N(\Delta t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)\approx\lambda\Delta t.$$

于是，我们可以利用事件A的模拟方法逐个观察各子区间Δ_1，Δ_2，…中的顾客到达与否，最后即可得到顾客流的相继到达时刻s_1，s_2，…的一列样本值。根据上述分析而设计的Poisson流模拟程序框图可见图4-15，图中T为预定模拟终止时刻。由于这种方法是首先给出模拟的终止时刻，故又称定时结束模拟。

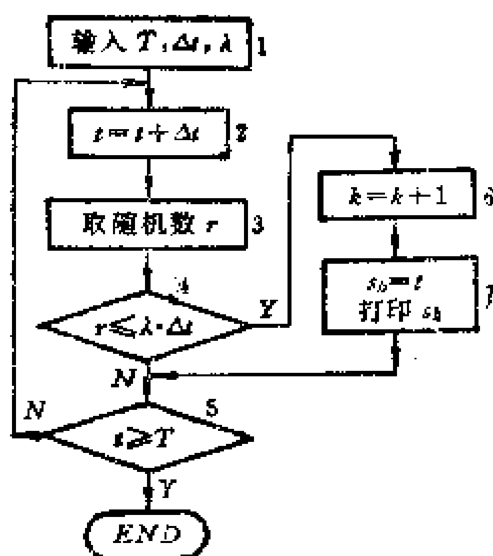


图 4-15

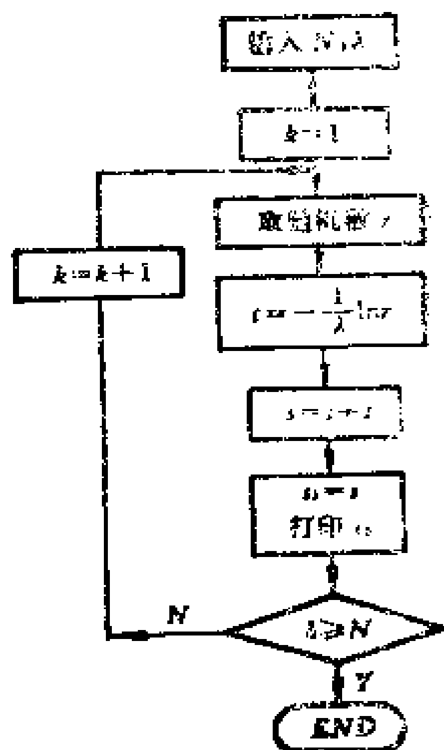


图 4-16

2. 模拟方法Ⅱ

设s_n为第n个顾客的到达时刻，作$\tau_n=s_n-s_{n-1}$（$n=1$，2，…），$s_0=0$，则τ_n为顾客流的相继到达时间间隔，且显然有

$$s_1=\tau_1,\quad s_2=\tau_2+s_1$$
$$s_3=\tau_3+s_2,\ \cdots,\ s_n=\tau_n+s_{n-1}$$

因此，为获得$\{s_n\}$的样本序列，只须获得$\{\tau_n\}$的样本序列即可。由Poisson流性质知，τ_1，τ_2，…，τ_n，…相互独立，且均服从同一负指数分布（参数为λ）。因此，只须在计算机上按照表4-5

的抽样公式不断获得负指数分布随机数，则这就是所求的$\{\tau_n\}$样本序列。根据上述设想的Poisson 流模拟程序框图见图 4-16。在该图中，N为预先给定的待模拟的顾客总数。由于该方法是预先给定顾客数N，故又称为定数结束模拟。

3. 模拟方法Ⅱ

除上述二种方法外，还可利用第二章定理 2.22 的原理来得到一种新的方法Ⅱ。该方法只要给定模拟终止时刻t及$(0, t]$到达顾客总数N，则由定理 2.22 得知，在$M(t)=n$发生的条件下，$(s_1, s_2, \cdots, s_n)$与$(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$同分布，其中$U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}$是相互独立且同在$(0, t)$上均匀分布的随机变量$U_1, U_2, \cdots, U_n$的顺序统计量，因此只要连续产生$n$个$(0, t)$均匀分布随机数，并将其按大小顺序排列，则在$(0, t]$内$n$个顾客的到达时刻样本即可获得。有关方法Ⅱ的程序框图见图4-17。

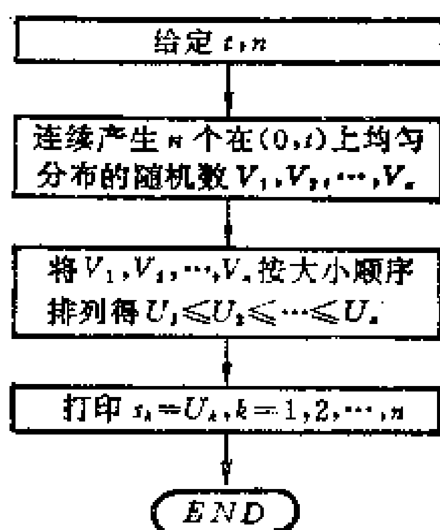


图 4-17

（三）齐次马氏链的模拟

设$\{X(t), t=0, 1, \cdots\}=\{X(0), X(1), \cdots, X(n), \cdots\}$为齐次马氏链。所谓对齐次马氏链的模拟，其实质就

是按照一定的方法获取一个样本序列$\{U_0, U_1, \cdots, U_n, \cdots\}$，其中$U_i$是随机变量$X(i)$的样本（$i=0, 1, 2, \cdots$）。如果$X(0)$，$X(1)$，…相互独立且分布列已知，则可按照随机变量的模拟方法来分别独立地取得$X(n)$的样本U_n。然而，由齐次马氏链的基本特性—马氏性得知，各$X(n)$（$n=0, 1, \cdots$）之间是彼此相关的，但好在这种相关程度比较微弱，任一时刻$X(n)$的状态仅依赖于前一时刻的状态$X(n-1)$。具体地说，$X(1)$依赖于$X(0)$，$X(2)$依赖于$X(1)$，…，$X(n+1)$依赖$X(n)$，…。因此，只要给定初始状态k（或初始状态的概率分布）与转移矩阵P，上述问题是不难解决的。它只需由初始状态$X(0)=k_0$及P来决定$X(1)$的样本k_1，然后由$X(1)=k_1$及P来决定$X(2)$的样本k_2，…，由$X(n)=k_n$及P来决定$X(n+1)$的样本k_{n+1}，如此递推求解，直到满足要求为止。按照上述设想，对一个具有状态空间$I=\{0, 1, 2, \cdots, m\}$，转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

及初始状态k_0的齐次马氏链$\{X(t), t=0, 1, 2, \cdots\}$进行模拟，其具体步骤如下：

（1）$X(0)$有初始状态k_0，即$U_0=k_0$

（2）求$X(1)$的样本U_1：由于状态$X(0)=k_0$已发生，于是在$X(0)=k_0$已发生条件下，$X(1)$的条件分布列$P(X(1)=j|X(0)=k_0)=p_{k_0j}$（$j=0, 1, \cdots, m$）是已知的，它只须从矩阵$P$中取出第$k_0$行的各元素即可，即有

$X(0)$	0	1	2	…	m
p_0	p_{k_00}	p_{k_01}	p_{k_02}	…	p_{k_0m}

有了$X(1)$的条件分布列，就可以按照前述对离散型随机变量的一般模拟方法来取得$X(1)$的样本值U_1，即取随机数r_1，若对某k_1有 $\sum_{j=0}^{k_1-1} p_{k_0 j} < r \leqslant \sum_{j=0}^{k_1} p_{k_0 j}$，则$X(1)$有样本$U_1=k_1$。

（3）求$X(2)$的样本U_2：与上同理，由于$X(1)=k_1$已发生，故在$X(1)=k_1$已发生的条件下，$X(2)$的条件分布列

$X(2)$	0	1	2	…	m
p	$p_{k_1 0}$	$p_{k_1 1}$	$p_{k_1 2}$	…	$p_{k_1 m}$

是已知的，它只须取矩阵P的第k_1行的全部元素即可。然后按照前述模拟方法。取随机数r_2，若对某k_2有关系式 $\sum_{j=0}^{k_2-1} p_{k_1 j} < r \leqslant \sum_{j=0}^{k_2} p_{k_1 j}$，则$X(2)$的样本取$U_2=k_2$。

……

反复运用上述步骤，即可获得齐次马氏链$\{X(t),\ t=0,1,\cdots,m\}$具有初始状态$X(0)=k_0$的一组样本值$k_0$，$k_1$，$k_2$，…，$k_m$。需要说明的是，上述样本序列是在初始状态有$X(0)=k_0$已确定的情况下获得的。若$X(0)$亦为随机变量，并有初始分布列

$X(0)$	0	1	2	…	m
p	q_0	q_1	q_2	…	q_m

此时，只需首先按照离散型随机变量的一般模拟方法求得$X(0)$的样本值k_0，然后再按上述步骤执行即可。至于状态空间I为可列时，方法是完全类似的，在此不再阐述。

（四）弱平稳过程的模拟

设$\{X(t),\ t\in R_1\}$为弱平稳过程（协方差平稳过程），其相关函数$B(\tau)$（或谱密度$S(w)$）已知，期望$E[X(t)]=$

0，我们来考虑此平稳过程的模拟问题。一般来说，对应于同一相关函数$B(\tau)$（或谱密度$S(w)$）的弱平稳过程$\{\eta(t), t\in R_1\}$不是唯一的，但如果我们仅关心其数字特征，而不去考虑其他更为细微的统计特性的话，则任取一个满足上述数字特征的平稳过程$\{\eta(t), t\in R_1\}$作为$\{X(t), t\in R_1\}$的近似是允许的。基于这样一种思想，下面我们来介绍其中的二种方法。

1. 在采用数字计算机工具来模拟一个连续过程$\{X(t), t\in R_1\}$时，通常要对连续过程离散化与截断，即取有限多个等距离点$t_1, t_2, \cdots, t_n$（其中$t_{i+1}-t_i=\Delta t$为常数），并以（$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$）作为连续过程的近似。此时，相关函数$B(\tau)$相应地用相关矩阵$(b_{ij})_{n\times n}$来近似代替，其中有$b_{ij}=E(X(t_i)\times X(t_j))=B(t_j-t_i)$。因此，问题就归结为求满足上述条件$E(X(t_i))=0$及相关矩阵为$(b_{ij})$的$n$维向量的样本值问题。这只须采用下述方法。

首先任取一列随机变量$\{y_n\}$，使$E(y_n)=0$，$D(y_n)=B(0)$，$E(y_i, y_j)=0\ (i\neq j)$。显然符合上述要求的$\{y_n\}$可采用多种方法得到，例如$\{y_n\}$可取为在$(-h, h)$中独立均匀分布的随机变量，其中$h=\sqrt{3B(0)}$，或取为独立的$N(0, B(0))$正态随机变量。当然，这些随机变量的抽样值可采用§4.2的方法来获得。

然后对y_i作变换，使有

$$\begin{cases} \eta(t_1)=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n \\ \eta(t_2)=c_1y_2+c_2y_3+\cdots+c_ny_{n+1} \\ \cdots \\ \eta(t_k)=c_1y_k+c_2y_{k+1}+\cdots+c_ny_{k+n-1} \\ \cdots \\ \eta(t_n)=c_1y_n+c_2y_{n+1}+\cdots+c_ny_{2n-1} \end{cases}$$

其中系数c_j可通过下列方程组求解得到：

$$
\begin{cases}
(c_1c_1+c_2c_2+\cdots+c_nc_n)B(0)=b_{11}=B(t_1-t_1) \\
(c_2c_1+c_3c_2+\cdots+c_nc_{n-1})B(0)=b_{21}=B(t_2-t_1) \\
\cdots \\
(c_kc_1+c_{k+1}c_2+\cdots+c_nc_{n-k+1})B(0)=b_{k1}=B(t_k-t_1) \\
\cdots \\
(c_nc_1B(0))=b_{n1}=B(t_n-t_1)
\end{cases}
$$

则如此获得的n维向量（$\eta(t_1)$，$\eta(t_2)$，…，$\eta(t_n)$）必然满足上述要求。这是由于首先有$E(\eta(t_i))=0$，其次考虑到有：

$$
E(y_i,\ y_j)=\begin{cases} B(0) & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}
$$

因而有

$$
\begin{aligned}
E(\eta(t_1)\eta(t_k)) &= E[(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n)(c_1y_k \\
&\qquad +\cdots+c_ny_{n+k-1})] \\
&=(c_kc_1+\cdots+c_nc_{n-k+1})B(0) \\
&=b_{k1}
\end{aligned}
$$

进一步还有

$$
\begin{aligned}
E(\eta(t_i)\eta(t_{i+k})) &= E[(c_1y_i+\cdots+c_ny_{n+i-1})(c_1y_{i+k}+\cdots \\
&\qquad +c_ny_{n+i+k-1})] \\
&=[c_{k+1}c_1+c_{k+2}c_2+\cdots+c_nc_{n-k}]B(0) \\
&=b_{k+1,1}=B(k\Delta t) \\
&=b_{i,i+k}
\end{aligned}
$$

从而证明了利用上述方法求得的n维随机向量（$\eta(t_1)$，$\eta(t_2)$，…，$\eta(t_n)$）确实具有相关矩阵（b_{ij}）及期望$E(\eta(t_i))=0$等性质，因而可由其作为连续过程$\{X(t),\ t\in R_1\}$的近似，并以（$\eta(t_1)$，$\eta(t_2)$，…，$\eta(t_n)$）的抽样值（$U(t_1)$，$U(t_2)$，…，$U(t_n)$）作为$\{X(t),\ t\in R_1\}$的抽样值。至于获得（$U(t_1)$，$U(t_2)$，…，$U(t_n)$）的程序框图可见图4-18。本方法的缺点在于求解上述二次方程组时计算量较大，而且只能求出近似解。此外由于当采用n维向量来近似代替连续过程时，显然要求n较大，这就大大增加了求解方程组的困难。

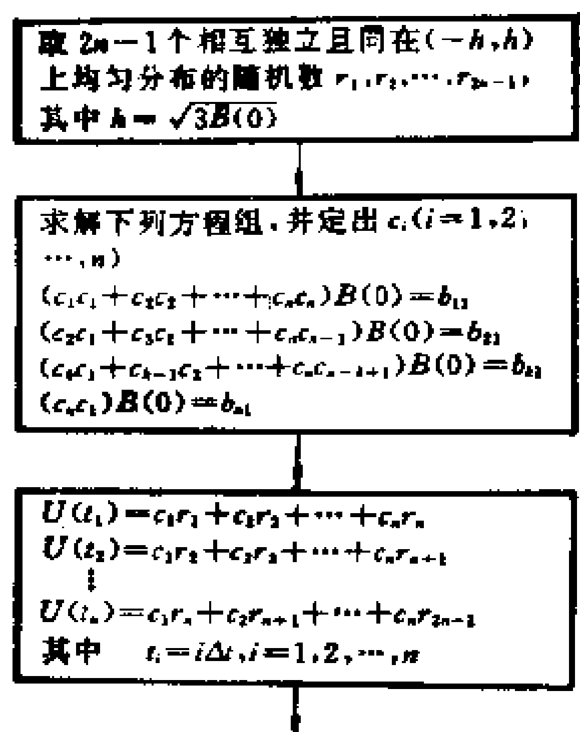


图 4-18

2. 设 $\{X(t), t\in R_1\}$ 为弱平稳过程，$E\{X(t)\}=0$，谱密度 $S(\omega)$ 已知。下面来考虑另一种较为简单的模拟方法。该方法在模拟过程中无需再进行时间“截断”，而可直接得到过程的样本函数。

首先令

$$a^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega$$

作

$$f(\omega)=\frac{S(\omega)}{\pi a^2}$$

然后取一对相互独立的随机变量 ω，θ，其中 ω 以 $f(\omega)=\frac{S(\omega)}{\pi a^2}$ 为其密度函数，而 θ 在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布，则平稳过程 $\eta(t)=a\cos(\omega t+\theta)$ 必为所求。这是因为根据 ω 与 θ 的定义，有

$$E(\eta(t))=aE(\cos\omega t\cos\theta-\sin\omega t\sin\theta)=0$$

$$E[\eta(t)\eta(t+\tau)]=a^2E\left[\frac{1}{2}\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)+\frac{1}{2}\cos\omega\tau\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}E[\cos\omega\tau]$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega\tau f(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

根据协方差$B(\tau)$和谱密度$S(\omega)$的关系易知，平稳过程$\{\eta(t),\ t\in R_1\}$以$S(\omega)$为谱密度。

这样，对于任一具体给定的$S(\omega)$，只须根据§4.2的方法产生一个$f(\omega)$分布随机数$\tilde{\omega}$及$(-\pi,\ \pi)$上均匀分布随机数$\tilde{\theta}$，作$U(t)=a\cos(\tilde{\omega}t+\tilde{\theta})$，则$U(t)$即可作为所求平稳过程$\{X(t),\ t\in R_1\}$的样本函数。

例4.3 某地区天气有雨、晴、阴、多云四种状况，设明天的天气状况以一定的概率取决于今天的天气，并具有转移概率如表4-7所示，试从晴天（初始状态）开始，模拟一年的天气状况，并统计出各类天气状况的累计天数及其所占百分比。

表 4-7

今天＼明天	雨	晴	阴	多云
雨	0.5	0.1	0.2	0.2
晴	0.2	0.4	0.2	0.2
阴	0.3	0.2	0.4	0.1
多云	0.2	0.3	0.1	0.4

解 以0、1、2、3分别代表雨天、晴天、阴天、多云四种状况，以x_n表示第n天的天气状况，则由题意可知$\{x_n,\ n=$

0，1，2，…}是有限状态齐次马氏链，并有状态空间 $I=\{0,1,2,3\}$，一步转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2\\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1\\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

按照前述齐次马氏链的模拟方法，可写出对应于上述问题的程序框图4-19。每次模拟试验可模拟 N_0 天的天气状况（取 $N_0=365$，

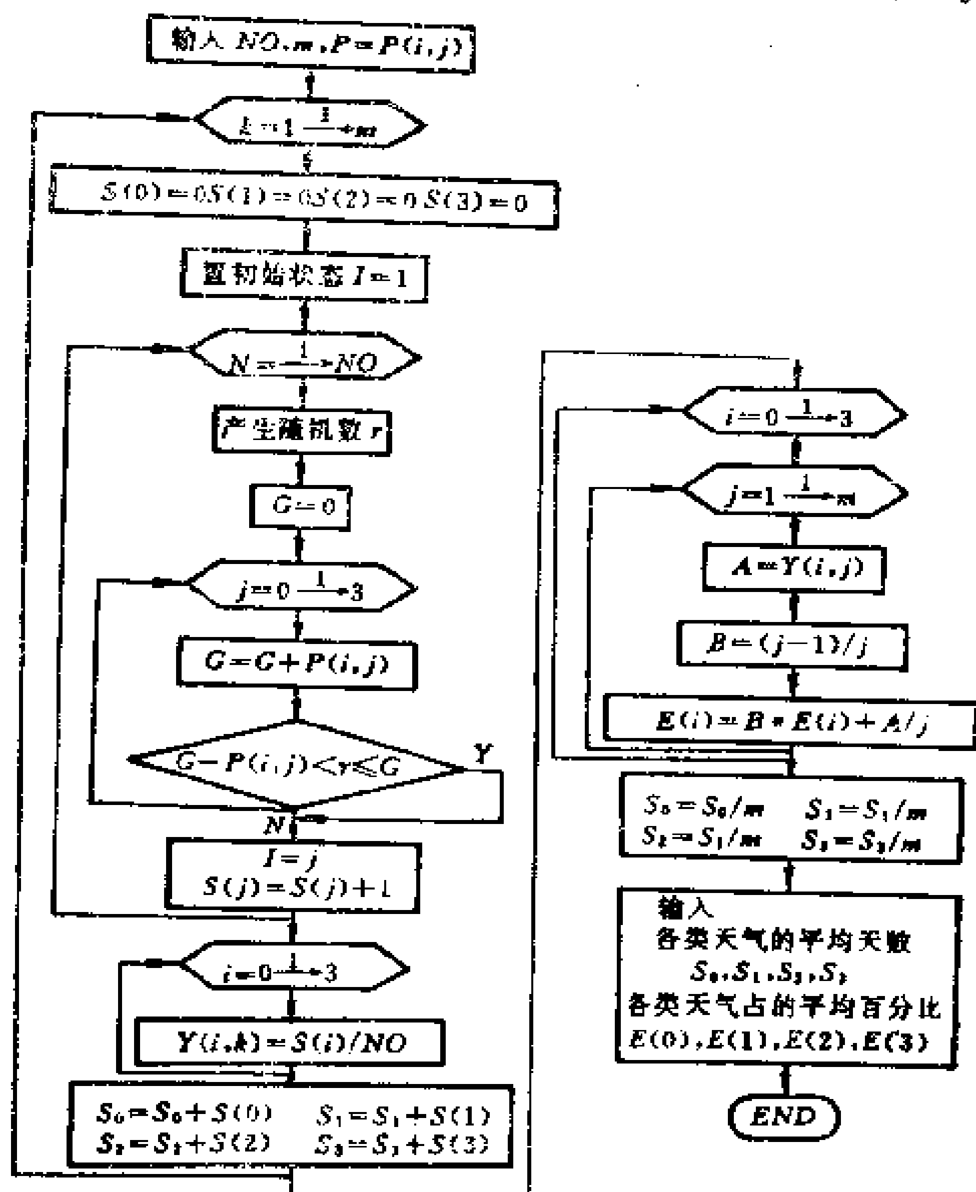


图 4-19

则每次模拟试验就可模拟一年的天气状况)，并安排作m次模拟试验，从而求出各类天气状况的平均天数及平均百分比。需要指出的是，在计算上述各类天气的平均天数时，可采用如下的迭代公式：

$$\bar{x}_i = \frac{i-1}{i}\bar{x}_{i-1} + \frac{1}{i}x_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

在图 4-19 中，各标识符的含义如下

$P(i,\ j)$—转移概率（$i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ j=0,1,\ 2,\ 3$）

$S(0)$—雨天累计

$S(1)$—晴天累计

$S(2)$—阴天累计

$S(3)$—多云天累计

N_0—预定每次试验的模拟天数

N—每次试验中模拟天数累计值

m—预定重复模拟的试验次数

$y(i,\ k)$—在第k次模拟试验中第i种天气状况所占的百分比（$i=0,\ 1,\ 2,\ 3$）

$E(i)$—第i种天气状况所占的平均百分比（$i=0,\ 1,\ 2,\ 3$）

S_i—第i种天气状态的累计数（$i=0,\ 1,\ 2,\ 3$）

编制对应图 4-19 的 BASIC 源程序(从略)。当输入转移矩阵P的各元素及N_0，m的数值后，执行上述程序，即可获得该问题的模拟解。

$$E(0)=0.2773 \qquad E(1)=0.2418$$

$$E(2)=0.2206 \qquad E(3)=0.2603$$

读者不难求出该问题的分析解，从比较可知，其误差是不大的。

§4.4 随机系统的模拟

一个随机系统，例如排队系统、可靠性系统或库存系统等，当影响系统状态变化的因素及其相互关系较为复杂时，一般来说，采用排队论、随机库存论或系统可靠性数学的分析理论来求解将是困难的。此时，采用合适的计算机模拟方法，将可使求解问题得到解决。本章介绍在随机系统模拟时常用的两种模拟方法：时间步长法与最短时间的事件步长法，并通过两个例题来说明其求解问题的全过程。

（一） 时间步长法

当人们去考察某一对象系统的状态与行为的变化过程时，通常总是随着时间的进程来逐步考察与分析的。因此在采用计算机模拟求解时，人们很自然地想到也可以按照时间的进程，一步一步地对系统的行为与活动，先进行动态模仿，然后再进行考察分析与记录，以期达到求解的目的。采用上述思想的模拟法称为时间步长法。在采用时间步长法来作计算机模拟时，其基本步骤为：首先选取对象系统的一个初始起点作为模拟时钟的零点，然后根据实际问题的需要，选定一个时间步长（可以固定不变，也可以随时间而变）。于是从模拟时钟的零点开始，每推进一个时

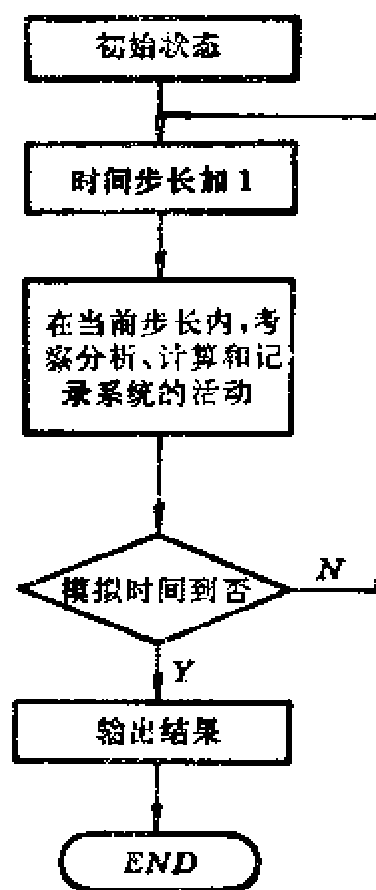


图 4-20

间步长就对系统的活动和状态按照预定的规则和目的进行考察、分析、计算和记录，直到预定模拟结束时刻为止，其基本流程如图4-20。

例4.4 材料仓库服务系统是由一个仓库管理员和领料工人构成的等待制排队系统。设工人的到达为Poisson流，平均每小时有12个工人来领料，每个工人所需的领料时间均匀分布在2到4分钟之间，求该系统管理员忙的概率。

解 $\lambda=12$人/小时$=0.2$人/分。考虑到管理员忙的概率可近似地用如下等式来代替，即有

$$P_{忙}=管理员忙时累计/总模拟时间.$$

因此我们只须每隔一分钟来观察一下领料工人的到达状态及领料状态（是否有工人到达？是否领完？），并记录该时间间隔（t，$t+1$］中的忙时，问题即可解决。至于在（t，$t+1$］中是否有领料工人到达，可利用Poisson流的模拟法Ⅰ的结果，并取$\Delta t=1$（分），则有

$$P(N(t,\ t+1)=1)\approx\lambda\Delta t=0.2$$

$$P(N(t,\ t+1)=0)\approx0.8$$

而领料时间的样本值可利用（a，b）上均匀分布随机数来取得，即有

$$W=2+(4-2)*\mathrm{RND}(1)$$

图4-21画出了工人到达与服务的文字框图，图4-22为对应的程序框图，程序框图中的标识符含义如下：

T—预定模拟时间

T_1—仓库管理员的释放时刻

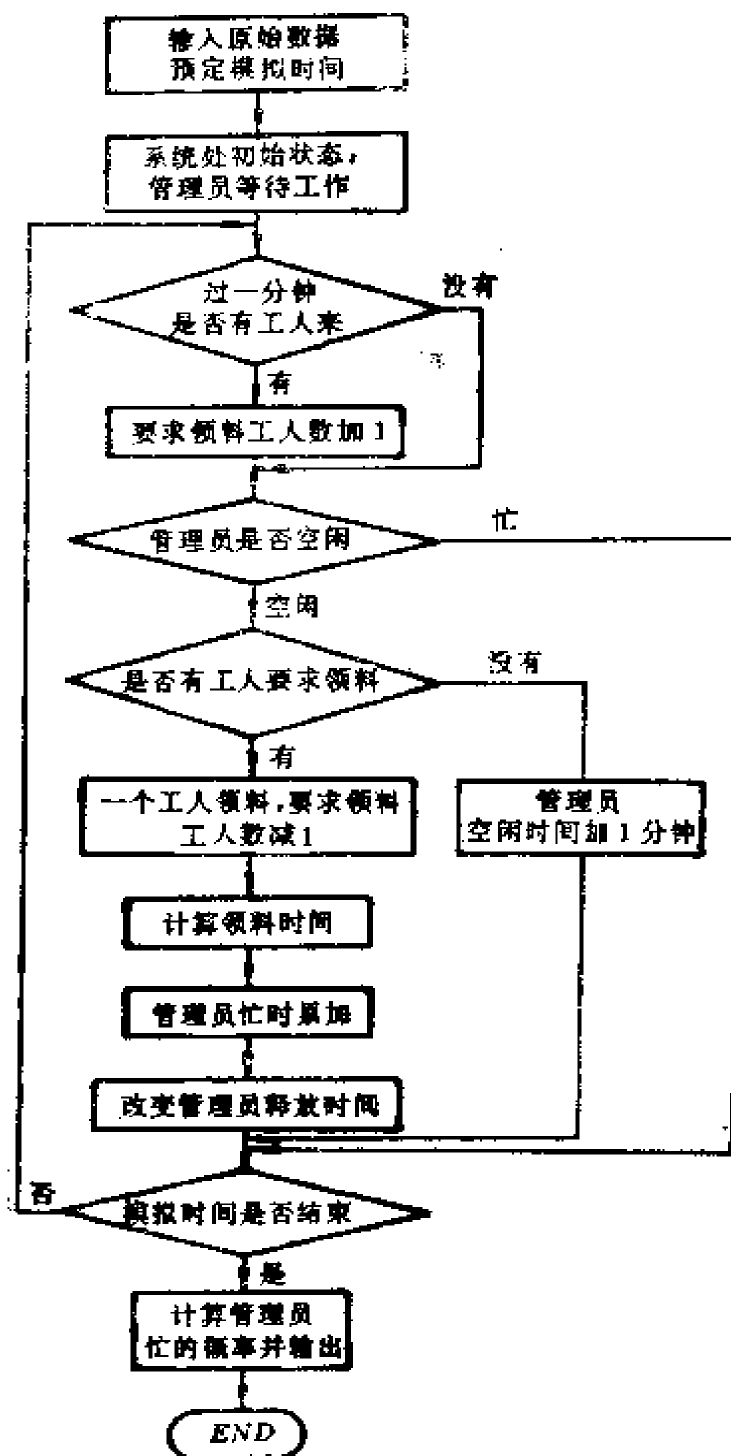
T_2—每个工人的到达时刻

T_3—管理员忙时累计

T_4—仓库管理员空闲时间累计

Q—当前时刻要求领料的工人数

W—领料时间



输入原始数据
预定模拟时间
系统处初始状态，
管理员等待工作
过一分钟
是否有工人来
没有
有
要求领料工人数加1
管理员是否空闲
忙
空闲
是否有工人要求领料
没有
有
一个工人领料，要求领料
工人数减1
管理员
空闲时间加1分钟
计算领料时间
管理员忙时累加
改变管理员释放时间
否
模拟时间是否结束
是
计算管理员
忙的概率并输出
END

图 4-21

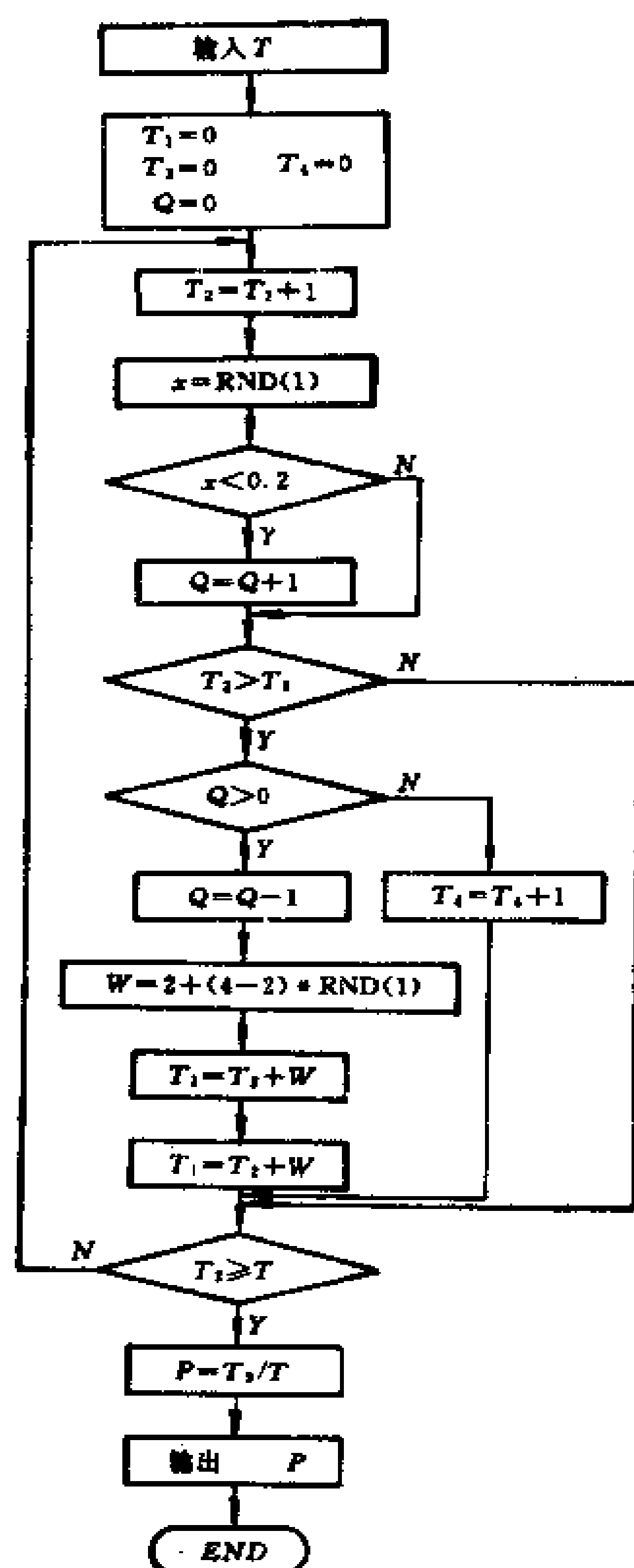

输入 T
$T_1=0$
$T_3=0$
$T_4=0$
$Q=0$
$T_2=T_2+1$
$x=RND(1)$
$x<0.2$
N
Y
$Q=Q+1$
$T_2>T_1$
N
Y
$Q>0$
N
Y
$Q=Q-1$
$T_4=T_4+1$
$W=2+(4-2)*RND(1)$
$T_3=T_3+W$
$T_1=T_2+W$
N
$T_2\geqslant T$
Y
$P=T_3/T$
输出 P
END

图 4-22

P—管理员忙的概率

编制相应的 BASIC 程序，并执行，即可获得其解。

$$P = 0.5416120$$（有关程序从略）

（二）最短时间的事件步长法

观察例 4.4 的模拟求解过程，可以发现如下问题：在采用时间步长法来考察、分析与记录系统的状态变化时，由于所采用的时间步长是等间隔的，因而在一些时间间隔（t，$t+\Delta t$）内，会发生既无工人到达，又无领料结束的状况。此时，计算机执行对应程序所作的分析、比较与计算工作将成为多余。为此人们考虑是否可采用不等间隔步长的考察方法，且只在那些人们关心的事件（如工人到达或领料结束等）A发生的时刻点上来考察、分析与计算系统的状态变化，从而可加快模拟的求解过程。然而注意到，对多数随机系统而言，由于其发生的各种事件的性质可以是多种多样的，为了依照时间的进程来考察该系统的动态变化，就必须对这一系列不同性质的事件，按照发生时间的先后顺序来逐个进行考察，这就是最短时间的事件步长法的基本思想。下面我们首先介绍什么是最短时间事件。在模拟模型中，存在着一系列不同性质的事件，这些事件中发生的时刻距初始时点最近的对应事件称为最短时间事件。我们以最短时间事件为步长（确切地说是以相邻最短时间事件的间隔时间为步长），一步一步地对系统的行为按照时间的进程来进行动态模拟的方法称为最短时间事件步长法。采用最短时间事件步长法来进行动态模拟的过程如下：首先选取系统的一个初始状态，然后在这一系列事件中选取一最短时间事件，以该事件的时间为步长来考察分析、计算和记录系统的行为与状态的变化，并将初始时点移到上述事件发生的当前时刻，接着再选取新的最短时间事件……如此往复，一直模拟到预定的总模拟时间为止（见图 4-23）。在实际问题中，例如

厂内运输，市内公共交通，石油船队的海上运输，固定航线的航空运输等，这一类随机系统的基本特点是：系统中的部分要素以相同的方式序贯地不断地改变其本身的状态，而且这种状态的改变，是以循环的形式周而复始地进行的。因而，对这一类系统作计算机模拟时，采用最短时间的事件步长法是适宜的。

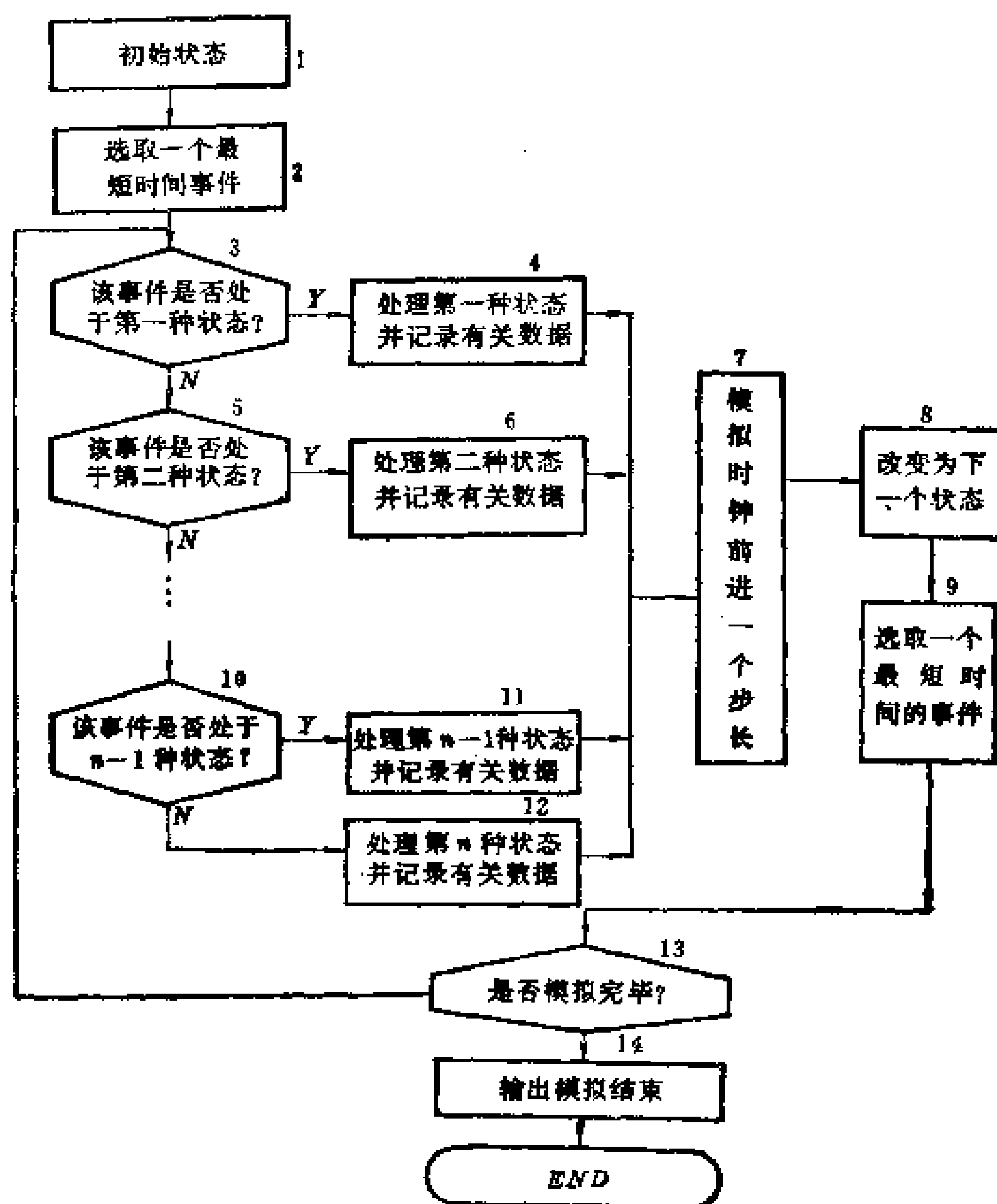


图 4-23

例 4.5　机器看管系统模拟

一个机器看管系统，有 m 台机器，并由 c 个工人共同负责看管与修理。并设

（1）各台机器的质量相同，机器的连续运转时间相互独立且服从同一负指数分布。平均寿命为 $\frac{1}{\nu}$（$\nu>0$），

（2）每个工人技术相同，且修理时间相互独立并服从同一负指数分布，平均修理时间为 $\frac{1}{\mu}$（$\mu>0$），

（3）工人对故障机器的修理与其他机器连续运转是否正常无关，修复后的机器其寿命分布与新的一样。

（4）机器停止运转每单位时间的损失费为 C_1 元，工人单位时间的产值为 C_2 元。

若机器的等待时间为 E，工人总的空闲时间为 F，则系统总的损失费为 $S=C_1E+C_2F$。试求当机器数 m 固定时，为使系统的总损失费最小，应配备多少工人为最优？

解　当本问题采用最短时间事件步长法模拟时，首先要确定一个初始状态。不妨假定开始时所有的机器都正常运转，工人处于空闲状态。并设 T 为模拟的终止时间，然后来依次模拟修理工人数 c 分别取 1，2，3，…时的系统损失费。最后根据系统损失费 S 随 c 而变化的单调性来确定最优工人数。

根据以上思想并采用最短时间事件步长法来模拟时可设计模拟程序框图4-24。框图中各标识符的含义如下：

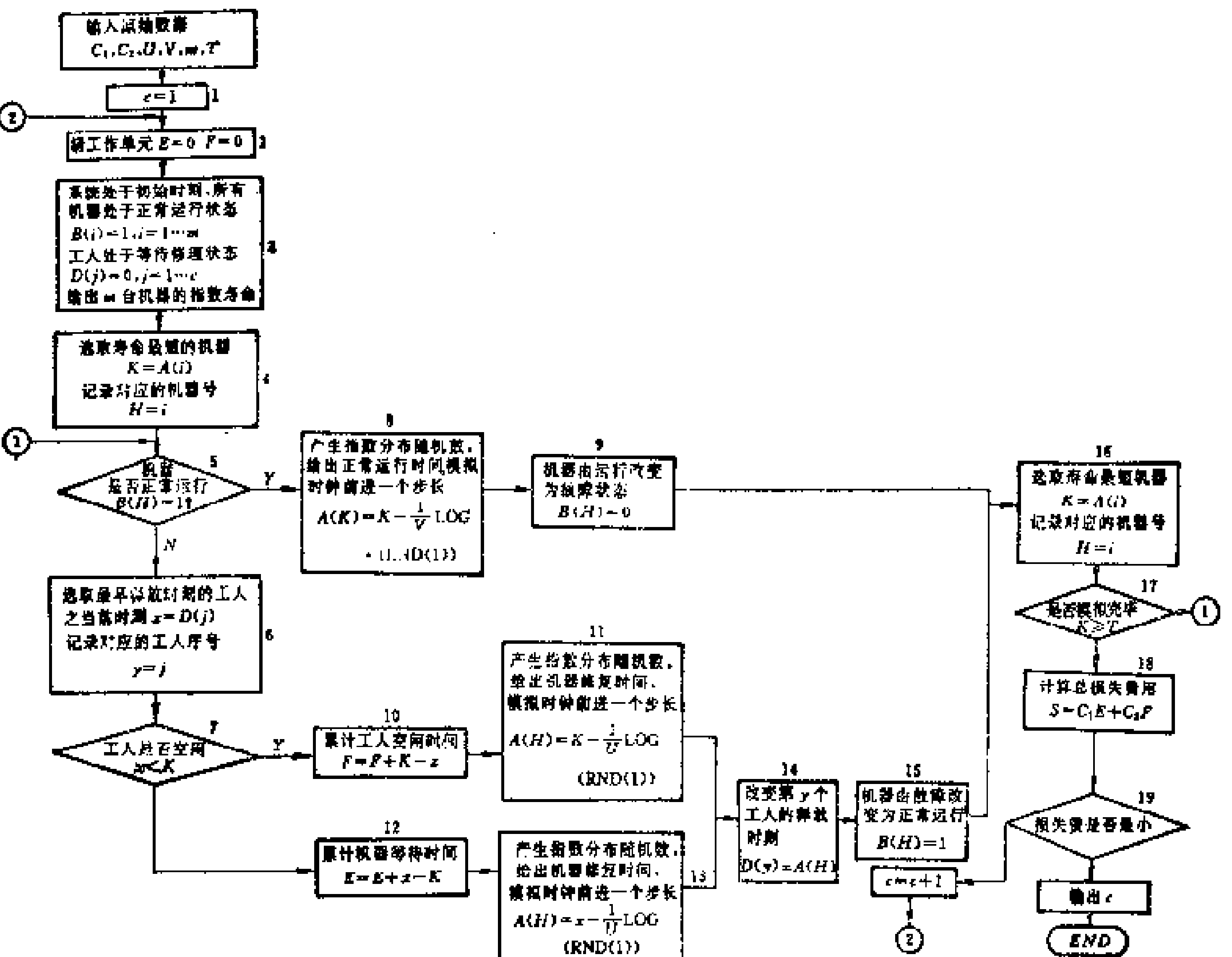
T——模拟终止时间

m——机器数

c——工人数

$B(i)$——第 i 台机器所处状态（$i=1,2,\cdots,m$），其中

$$B(i)=\begin{cases}1\text{——机器正常运转}\\0\text{——机器发生故障}\end{cases}$$



输入原始数据
C_1, C_2, U, V, m, T
$c=1$
1
清工作单元 $E=0$ $F=0$
2
系统处于初始时刻，所有机器处于正常运行状态
$B(i)=1, i=1\cdots m$
工人处于等待修理状态
$D(j)=0, j=1\cdots c$
输出 m 台机器的指数寿命
3
选取寿命最短的机器
$K=A(i)$
记录对应的机器号
$H=i$
4
机器是否正常运行
$B(H)=1?$
5
Y
N
产生指数分布随机数，输出正常运行时间模拟时钟前进一个步长
$A(K)=K-\frac{1}{V}\text{LOG}$
8
机器由运行改变为故障状态
$B(H)=0$
9
选取最早结束空闲时刻的工人之当前时刻 $x=D(j)$
记录对应的工人序号
$y=j$
6
工人是否空闲
$x<K$
7
累计工人空闲时间
$F=F+K-x$
10
产生指数分布随机数，给出机器修复时间，模拟时钟前进一个步长
$A(H)=K-\frac{1}{U}\text{LOG}$
(RND(1))
11
累计机器等待时间
$E=E+x-K$
12
产生指数分布随机数，给出机器修复时间，模拟时钟前进一个步长
$A(H)=x-\frac{1}{U}\text{LOG}$
(RND(1))
13
改变第 y 个工人的释放时刻
$D(y)=A(H)$
14
机器由故障改变为正常运行
$B(H)=1$
15
$c=c+1$
选取寿命最短机器
$K=A(i)$
记录对应的机器号
$H=i$
16
是否模拟完毕
$K\geq T$
17
计算总损失费用
$S=C_1E+C_2P$
18
损失费是否最小
19
输出 c
END

图 4-24

$A(i)$——第 i 台机器所处状态的当前时刻（$i=1$，2，…，m），

$D(i)$——第 i 个工人修复机器的释放时刻

C_1——工人单位时间的产值

C_2——机器等待单位时间的损失费

U——单位时间平均能修复的机器数

V——一台机器在单位运转时间内发生故障的平均次数

S——总损失费用

E——机器等待时间累计

F——工人空闲时间累计

K——最短时间机器的当前时刻

H——最短时间机器对应的机器号

L——工人修完机器的释放时刻

x——最短释放时间工人的当前时刻

y——最短释放时间对应的工人序号

表 4-8 列出了当 $m=86$，$\frac{1}{V}=500$ 小时，$\frac{1}{U}=34$ 小时，$C_1=3.46$ 元/小时，$C_2=3.2$ 元/小时时的模拟结果，其中每次预定模拟时间为一万小时，连续模拟五次取其平均值作为模拟结果。观察表 4-8 的模拟结果可知当工人数 $c\leqslant 10$ 时，最优工人数为 7。

表 4-8

工人数 c	2	3	4	5	6	7*	8	9	10
每小时平均损失费 E	183.00	128.87	76.04	37.60	24.54	9.04	9.41	10.2	15.21

（三）随机系统模拟的一般流程

在对随机系统作计算机模拟时，通常采用如下流程：

1. 问题的识别

首先搞清被模拟系统的状态特性与时间特性，是确定性系统还是随机性系统？是离散性的还是连续性的？此类问题能否采用分析解或解析解？如果不能，则考虑采用模拟解。其次确定系统的目标函数、状态变量和可控变量。

2　数据收集和统计处理

在确定状态变量的特性后，若是随机变量，则需作数据收集和统计处理，以便确定其概率分布类型及其分布参数的估计值。由于上述问题将在数理统计中涉及，故在此从略。

3　构造模拟模型。选择模拟方法，这是本章介绍的重点。

4　进行模拟试验。在试验中，将系统的状态变化过程不断地记录。

5　输出结果，并作相应的统计分析与精度估计。

上述流程可见图 4-25。

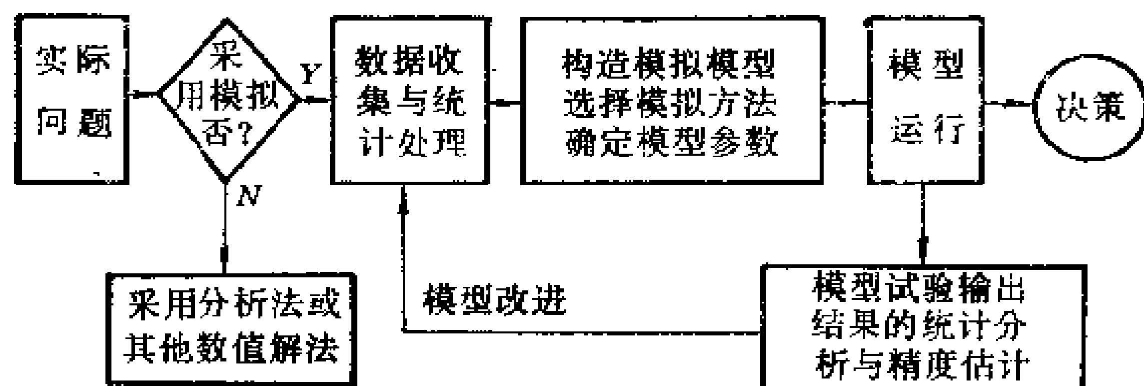


图 4-25

限于篇幅，本章只介绍了上述流程的步骤3与4，其他可参见〔2〕、〔4〕、〔5〕。

§4.5　精度估计与模拟次数的确定

本节主要介绍利用统计试验法对随机性模型作模拟试验时，如何估计模拟结果的精度以及当给定系统精度要求时，如何确定

模拟试验中的模拟次数。

（一） 模拟结果的精度估计

对于一个随机性模型来说，通常人们关心的状态量有如下二类：事件A发生的概率$P(A)$与随机变量ξ的期望值$E(\xi)$。例如“针与直线相交的概率”、“仓库管理员忙的概率”以及“公司的平均赢利总额”、“领料工人的平均等待时间”等等。然而在利用统计试验法求上述问题时，一般只能得到$P(A)$的近似值$\hat{p}$以及$E(\xi)$的近似值$\hat{a}$。因此，需要解决$\hat{p}$代替$P(A)$及以$\hat{a}$代替$E(\xi)$的误差估计问题或精度估计问题。

1. 对事件A模拟的精度估计

当我们对某事件A进行模拟时，为了求得事件A的概率$P(A)$，通常采用如下步骤：

1° 作N次独立重复试验，并观察和记录事件A在各次试验中发生的次数n_A。若设x_i为第i次试验中事件A发生的次数，即

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次试验中事件 } A \text{ 发生}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次试验中事件 } A \text{ 不发生}\end{cases}$$

则应有$n_A=\sum_{i=1}^{N} x_i$。

2° 计算事件A在N次试验中发生的频率

$$f_N=n_A/N=\sum_{i=1}^{N} x_i/N$$

3° 根据大数定律，当N无限增大时，f_N在某种概率意义下将收敛于$P(A)$，从而可用$f_N=n_A/N$作为$P(A)=p$的估计值。

显然，通过模拟试验，可用试验结果$\frac{n_A}{N}$代替p的绝对误差

为$|\Delta p|=\left|\frac{n_A}{N}-p\right|$。但由于在做每一轮试验（所谓一轮试验是指做一个$N$次独立重复试验）时，即便试验次数$N$相同，所得的模拟结果$n_A$也会不同，亦即$\frac{n_A}{N}$是一个随机变量，或对于给定的$\varepsilon>0$，“$|\Delta p|<\varepsilon$”是一个随机事件。因此，正确的提法应是：在一定的可靠水平（置信水平）β上估计上述误差，即有

$$P(|\Delta p|<\varepsilon)=P\left(\left|\frac{n_A}{N}-p\right|<\varepsilon\right)=\beta \tag{4.4}$$

例如，当$\beta=99.7\%$时，(4.4) 表示以99.7%的可靠程度保证模拟结果的绝对误差小于ε，或者说在作1000次模拟试验时，将有997次模拟试验保证结论“$|\Delta p|<\varepsilon$”成立。下面我们来介绍当给定模拟次数N及可靠水平β时，如何求误差ε。

（1）中心极限定理估计法

当我们在对事件A进行模拟时，由于模拟试验是独立重复试验，故在每次试验中，事件A出现的次数X_i(只能取0与1）应独立同分布，且

$$P(X_i=1)=p>0,\quad P(X_i=0)=1-p>0$$

从而

$$E(X_i)=p>0,\quad D(X_i)=p-p^2=p(1-p)>0 \tag{4.5}$$

于是，由中心极限定理知，当n充分大时，统计量

$$\varphi_n=\frac{\frac{\Sigma X_i}{n}-E(X_i)}{\sqrt{\frac{D(X_i)}{n}}} \tag{4.6}$$

应近似服从$N(0,1)$分布，从而有

$$P(\varphi_n\leqslant x)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

其中$N(0,1)$分布函数$\Phi(x)$的数值可在一般概率论书中找

到。由于

$$P(|\varphi_n|<U)=\int_{-U}^{U}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=2\int_{0}^{U}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=2\left[\int_{-\infty}^{U}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right]=2\Phi(U)-1$$

将（4.6）式代入上式，并注意（4.5）式，则有

$$P\left(\left|\frac{\frac{\sum x_i}{n}-E(x_i)}{\sqrt{\frac{D(x_i)}{n}}}\right|<U\right)=P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n}-p\right|<U\sqrt{\frac{D(x_i)}{n}}\right)$$

$$=P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<U\sqrt{\frac{D(x_i)}{n}}\right)=2\Phi(U)-1=\beta \qquad (4.7)$$

若取

$$\varepsilon=U\sqrt{\frac{D(x_i)}{n}}=U\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad (4.8)$$

则（4.7）式表示：以事件A在模拟试验中发生的频率代替概率$P(A)=p$时，在置信水平β的前提下，其绝对误差将小于ε。这正是前述精度估计的准确提法。

当给定置信水平β及模拟次数n时，由（4.8）式可知，只要计算出U及p的数值，ε即可获得。显然，U是容易得到的，它只须根据（4.7）式查表即可获得β所对应的U（常记为U_β）。至于p，可用模拟结果$\hat{p}=\frac{n_A}{n}$来代替，即以$\hat{p}(1-\hat{p})$作为$D(x_i)$的近似值，从而解决了ε的估计问题。

例 4.6 在 Buffon 投针试验中，经 10000 次试验后，获得

针与直线相交的概率近似值 $\hat{p}=0.31831$。试求在置信水平 $\beta=0.95$ 下，以 $\hat{p}$ 代替真值 p 的绝对误差 ε。

解 由 $\beta=0.95$ 查表可知 $U_\beta=1.96$。因为 $\hat{p}=0.31831$，$n=10000$，故有

$$\varepsilon=U\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=1.96\times\frac{0.4657}{100}=0.009127$$

此结果表明，以 $\hat{p}=0.31831$ 代替真值 p 绝对误差小于 0.009127 的可靠度为 95%，或待求的真值落在区间（0.31831－0.009127，0.31831＋0.009127）内的可能性达 95%。

（2）Чебышев 不等式估计法

运用中心极限定理估计 ε 的前提是子样容量 N 充分大。当 N 较小时，此方法显然是不适合的。这时可用 Чебышев 不等式法，若取 $Y=\frac{n_A}{N}$，则有

$$E(Y)=E\left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right)=p,\quad D(Y)=D\left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right)=\frac{\sigma_x^2}{n} \tag{4.9}$$

利用 Чебышев 不等式，得

$$P(|Y-E(Y)|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{\sigma_y^2}{\varepsilon^2}$$

将（4.9）式代入上式，得

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{\sigma_x^2}{n\varepsilon^2} \tag{4.10}$$

若取

$$\beta=1-\frac{\sigma_x^2}{n\varepsilon^2}\approx 1-\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n\varepsilon^2} \tag{4.11}$$

则（4.10）式表示，以 $n_A/n=\hat{p}$ 代替真值 p 时，其绝对误差小于 ε 的可靠度大于等于 β。因此，当给定 β、n、$\hat{p}$ 时，由（4.11）式同样可求出 ε，即

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n(1-\beta)}} \tag{4.12}$$

例 4.7 试用 Чебышев 不等式法估计 Buffon 投针模拟结果的绝对误差，其基本假设与前同。

解 将 $n = 10000$，$\beta = 0.95$，$\hat{p} = 0.31831$ 代入 (4.12) 式，得

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{0.31831 \times (1-0.31831)}{10000 \times 0.05}} = \frac{0.4657}{100 \times 0.223} = 0.209$$

比较上述两种方法可知，在同一置信度的条件下，当子样容量较大时，中心极限定理法的误差估计将优于 Чебышев 不等式法。但对于小子样，由于前者无法运用，因而只能采用后者。

2. 对随机变量模拟的精度估计

为了取得随机变量 ξ 的期望值 $E(\xi)$，通常采用下述步骤：

1° 作 ξ 的 N 次独立重复模拟试验，以取得总体 ξ 的一个容量为 N 的子样 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N)$。

2° 取子样均值 $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{N} \xi_i / N$。

3° 根据大数定律，当 N 无限增大时，$\bar{\xi}$ 在某种概率意义下将收敛于 $E(\xi)$，从而可用 $\bar{\xi}$ 作为 $E(\xi)$ 的估计值。

下面我们分两种情况来讨论用 $\bar{\xi}$ 代替 $E(\xi)$ 的误差估计问题。

(1) 总体分布未知的误差估计

当总体 ξ 的分布未知时，只要子样容量较大，仍可用中心极限定理法讨论误差估计问题。因为若 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N)$ 是总体 ξ 的简单子样，则不仅 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ 相互独立，且与总体 ξ 同分布。当 $E(\xi) = \mu < \infty$，$D(\xi) = \sigma_\xi^2 > 0$ 时，则由中心极限定理可知，统计量 $\psi_n = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i - \mu\right) \Big/ \sqrt{\frac{D(\xi_i)}{N}}$ 应近似服从

$N(0,1)$ 分布。于是，可采用类似于前述的分析方法，得到

$$P\left(\left|\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i-\mu}{\frac{\sigma_{\xi_i}}{\sqrt{N}}}\right|<V\right)=2\phi(V)-1=\beta$$

或

$$P\left(|\bar{\xi}-\mu|<V\frac{\sigma_{\xi_i}}{\sqrt{N}}\right)=2\phi(V)-1 \qquad (4.13)$$

取 $\varepsilon=V\sigma_{\xi_i}/\sqrt{N}$，则（4.13）表明，在置信水平$\beta$下，以模拟试验得到的子样均值来代替$E(\xi)=\mu$，其绝对误差将小于$\varepsilon$。于是，当给定置信水平$\beta$，模拟次数$N$时，可查$N(0,1)$表求得$\beta$对应的$V_\beta$而用子样方差 $S_N^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i-\bar{\xi})^2$ 代替 $\sigma_{\xi_i}^2$，便可求得ε。

以上是N较大时获得的精度估计，当N较小时，也可用Чебышев不等式法来估计。这时，由于$E(\bar{\xi})=E(\xi)=\mu$，$D(\bar{\xi})=\sigma_{\xi_i}^2/N$，因此由Чебышев不等式可得

$$P(|\bar{\xi}-E(\bar{\xi})|<\varepsilon)\geqslant 1-D(\bar{\xi})/\varepsilon^2$$

或

$$P(|\bar{\xi}-\mu|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{\sigma_{\xi_i}^2}{N\varepsilon^2}=\beta$$

显然，由上式可得

$$\varepsilon=\frac{\sigma_{\xi_i}}{\sqrt{N(1-\beta)}} \qquad (4.14)$$

这时，只要给定N与β，并用S_N代替σ_{ξ_i}，便容易求得ε。

（2）对正态母体的期望值之误差估计

上述估计是在ξ的母体分布未知情况下所作的精度估计。如果根据以往的经验，可以确知ξ_i来自正态母体，则在小子样的

情况下，还可用 t 分布作误差估计。由统计理论知

$$\frac{\bar{\xi}-\mu}{\frac{S_N}{\sqrt{N}}} \sim t(N-1)$$

或

$$P\left(\left|\frac{\bar{\xi}-\mu}{\frac{S_N}{\sqrt{N}}}\right|<t_\alpha\right)=1-\alpha=\beta \qquad (4.15)$$

其中$S_N^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i-\bar{\xi})^2$。这样，在上式中取

$$\varepsilon=t_\alpha\frac{S_N}{\sqrt{N}} \qquad (4.16)$$

则（4.15）式可变形为

$$P(|\bar{\xi}-\mu|<\varepsilon)=1-\alpha=\beta$$

因此，在置信水平β下，以$\bar{\xi}$代替$E(\xi)=\mu$的绝对误差ε可由（4.16）式计算出。

（二）模拟次数的确定

上述精度估计是在预先给定置信度β及模拟次数N的条件下进行的。然而在模拟的应用中，还常遇到另一类相反的问题，这就是对于给定的精度ε及置信度β，如何确定模拟次数N的问题。因为，从理论上说，N愈大，以n_A/N代替p或以$\sum_{i=1}^{N}\xi_i/N$代替$E(\xi)$，其精确度愈高。然而当N过大时，自然会浪费机时和人力，因此需要讨论N大到什么程度时，预定精度即可达到。这时当然也就无需再模拟了，这就是在模拟试验中的模拟次数确定问题。

1. 对事件模拟时模拟次数的确定

由前可知，当采用大样本的中心极限定理法估计误差时，误差表达式$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\beta$中的$\varepsilon$由（4.8）式来计算，而（4.8）式可变形为

$$n=\frac{U^2}{\varepsilon^2}p(1-p) \tag{4.17}$$

显然，当给定误差ε及β时，利用（4.17）可确定对应的模拟次数。它只需先查$N(0,\ 1)$表求得β对应的U_β，然后再求出p即可。但由于p恰恰是问题的待求解，为解决上述矛盾，可先试算若干次，以取得一个粗略的$\hat{p}$值来代替p，并将其代入（4.17）式，从而可求得n值。

例 4.8 在 Buffon 投针模拟次数中，若给定误差$\varepsilon=10^{-2}$，置信度取$\beta=99.7\%$，试求满足上述精度要求的最小模拟次数。

解 由于$\varepsilon=10^{-2}$，$\beta=99.7\%$，查$N(0,\ 1)$表可得$U_\beta=3$。然后作 Buffon 投针模拟试验，以取得p的粗略估计值$\hat{p}=0.302$。于是有

$$n=\frac{U^2}{\varepsilon^2}\hat{p}(1-\hat{p})=9\times10^4\times0.302\times0.698\approx19000\text{次}$$

即在置信水平$\beta=99.7\%$下，为使模拟试验的结果$\hat{p}=n_A/n$代替p时，其绝对误差小于0.01，至少需要作一万九千次模拟试验。

此问题也可用 Чебышев 不等式法来解决。这时，(4.12）式可变形为

$$n=\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2(1-\beta)} \tag{4.18}$$

于是，采用与中心极限定理类似的做法，可由给定的ε、β与试算的$\hat{p}$来求得n。

2. 对随机变量模拟时模拟次数的确定

由前可知，当总体分布未知而采用中心极限定理法作误差估

计时. 由 $\varepsilon = V\sigma_{\xi}/\sqrt{N}$ 可变形为

$$N = \frac{V_\beta^2}{\varepsilon^2}\sigma_{\xi}^2 \approx \frac{V_\beta^2}{\varepsilon^2}S_N^2 \tag{4.19}$$

于是．当给定 ε 与 β 时，可先查 $N(0, 1)$ 表求得 β 对应的 V_β。然后作若干次模拟，以取得 ξ 的子样方差 $S_N = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i - \bar{\xi})^2$，再将 ε、V、S_N 代入（4.19）式，即可计算出 N。

在模拟试验时，若确知 ξ 服从正态分布，这时可采用 t 分布法解决 N 的计算问题。因为由（4.16）式可得到 $\varepsilon = \frac{S_N}{\sqrt{N}}t$，或

$$N = \frac{S_N^2}{\varepsilon^2}t^2 \tag{4.20}$$

其中 t 可根据给定的 β 查自由度为 $N-1$ 的 t 分布表得到。由（4.20）式可知，为求 N，应给定 ε，$t(N-1)$ 与 S_N^2。但 S_N^2 与 $t(N-1)$ 中又包含了未知的 N，为了解决上述矛盾，可先给定一个 N_0 值，然后模拟 N_0 次，取得 $S_{N_0}^2$，将其与 ε，$t(N_0-1)$ 一起代入（4.20）式，即可求得 N。

习 题 四

1．利用随机数函数产生 50 个在 200 到 300 之间整数上均匀分布的随机整数，打印出这组数值，选出其中能被 3 与 5 整除的数，并求这些数之和。

2．设离散型随机变量 x 有分布列

x	-1	0	1
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$

写出用模拟法求解 $E(x)$ 的程序流程，并求其解。

3．一个离散型二元随机变量 (x, y) 有联合分布与边际分布如下，其中 $P_{m,n} = P(x = m, y = n)$。试作出 (x, y) 的模拟框图。

x P_{mn} y	0	1	$P(y=n)$
0	0.35	0.09	0.44
1	0.27	0.06	0.33
2	0.18	0.05	0.23
$P(x=m)$	0.80	0.20	1

4. 在Buffon投针问题（见§4.1）中，取$L=1$，$a=3$，试用模拟法求解针与平行直线相交的概率，并与分析法之结果作比较。

5. 对飞机进行三次独立射击，第一次射击命中率为0.4，第二次为0.5，第三次为0.7，飞机击中一次而被击落的概率为0.2，击中二次而被击落的概率为0.6。若被击中三次，则飞机必然被击落。试用模拟法求解概率$P(A)$，其中事件A表示经三次射击后飞机被击落。

6. 有30个电子器件D_1，D_2，…，D_{30}，它们的使用情况如下：一开始D_1工作，若D_1损坏则D_2立即开始工作；若D_2损坏则D_3立即开始工作……。今设D_i（$i=1$，2，…，30）的寿命X_i服从参数为$\lambda=0.1$（小时）的负指数分布且相互独立，令T为30个器件的使用总时间，试用模拟法求解概率$P(T\geqslant 30$小时)。

7. 某商店有一批25W的灯泡共1000个，分别来自A、B、C三个生产厂家，各有数量200，300，500个，其寿命均服从负指分布，平均寿命分别为1000、1500、2000（小时）。由于三种灯泡购价相同，故居民购买时可从中任取其一。试用模拟法求解某居民购买一个灯泡照明时，该灯泡寿命在1200～1500（小时）的概率及平均寿命。

8. 一种晶体管收音机使用两节1.5伏电池，即名义上该机是靠3伏电压来工作的。今设单独一节电池的实际电压为正态分布，有均值1.5伏与方差0.04伏。若工作电压偏离区间[2.75伏，3.25伏]，则收音机将不能正常工作。试用模拟法求解收音机不能正常工作的概率。

9. 某产品需依次经过四道不同的工序后方能成为半成品而进入仓库。设各道工序的加工时间相互独立，且均服从负指数分布，平均加工时间为20分钟。若X为该产品经四道工序加工后的总加工时间，试用模拟

法求X的平均值及概率P（$X>60$分）。

10．设有一机场，飞机的起飞与降落均在同一跑道上进行。今设飞机之到达流为Poisson流，平均每小时到达8架飞机，每架飞机的着陆时间为3分钟；此外，地面飞机要求起飞的到达流亦为Poisson流，每架飞机的起飞时间为2分钟。试模拟3600分钟的机场跑道使用过程，并求

（1）任一时刻飞机在空中等待的概率。

（2）跑道在任一时刻的空闲概率。

11．四个人相互传球，每传一次球，传球者等可能地传给其余三人中的一人。试用模拟法求第n次传球时，此球恰好由最初传球者传出的概率P_n(取$n=100$及$n=300$)。

12．设某系统由相互独立的n个子系统串联而成，而各个系统又均由m个相互独立、性能相同的元件并联而成。设第i个子系统中各元件的可靠度为R_i，$i=1$，2，…，n。试用模拟法求

（1）当$n=2$，$m=3$，$R_1=0.7$，$R_2=0.6$时的系统可靠度。

（2）当n、R_1，R_2不变时，欲使系统可靠度提高0.005，m应增加到多少？

13．设缓冲器的输入流为Poisson流，平均输入率为每秒N字。当每次输入的字到达时，若缓冲器充满，则输入的字将溢出损失；若缓冲器中还有空位时，则输入的字就排入队列，以便传送。而输出为同步传送，即在间隔为1的离散时刻开始进行传送，经过时段1后传送完毕。在两个传送时刻之间到达缓冲器的字必须等待到下个传送时刻开始才能传送，即使此时传送装置空着。每次传送是成批的，即当传送时刻开始的瞬间，若缓冲器中等待传送的字数$\leqslant c$时，则所有的字一次传送输出；若等待传送的字数$>c$，则只能传送输出前面c个字（$c<N$）。为计算该系统的输出速率与溢出概率，试写出上述缓冲器存贮与传送过程的程序框图。

14．一个理发店有三个服务员，对每个顾客的服务时间均服从正态分布，具有平均时间为20分，均方差为5分。顾客的到达流为Poisson流，在高峰时（从12:00到13:45）平均到达率为12人/小时，在非高峰时，平均到运率为6人/小时。服务员中从11:00到11:30有一人要离去吃中饭，第二人从11:30到12:00去吃饭，第三人从14:00到14:30吃饭。理发店内有三个空位可供顾客等待理发。顾客到来后，根据前面顾客的排队情况，随时可能离去。假定理发员都在忙着，且没有等待顾客时，新顾客

离去的概率为0.1；有一个顾客在等待时，新来顾客离去的概率为0.3；有二个顾客在等待时，新来顾客离去的概率为0.5；当有三个顾客等待时新来顾客因无空位坐而只好离去。此外，正在等待的顾客也可能因等待不耐烦而决定离去，设离去的概率为0.5。试建立该理发店的服务过程模拟框图。

15. 为求解事件A的概率$P(A)=p$，经构造模拟模型并作100次模拟试验后，得模拟解$\hat{p}=0.5$。试求以置信度$\beta=0.95$来估计该模拟解的误差ε。若将精度ε提高到10^{-3}，求最少模拟次数n。

第五章 随机库存论

贮备一批物品（或商品）以供未来销售或使用，这在工业生产、商业管理和军事作战等领域中都是普遍存在的现象。否则，由于工厂原料或零备件的短缺，会造成停工停产；商店缺少某种商品要损失营业额；医院缺少药品，医生将无法治病；武器贮备不足将导致战斗失利等等。总之，为了保障各类系统的正常运行，贮备一批必要的物质，不断补充库存是必须考虑的问题。一般来说，并非库存的物品愈多就愈好，因为保持不必要的过高库存量不仅会占据大量的流动资金，还要增加库存管理费用。而且，由于保存物资过多，造成物资库存时间延长也会使被保存物资失效和变质，从而造成损失。因此，研究合理的库存量，何时补充库存以及补充多少数量等为主要内容的科学的存贮管理和存贮方针就应运而生。通常，人们把研究有关存贮问题的科学称为库存论。

库存论（又名存贮论）源于1915年，当时，Harris首次建立了经济批量公式。然而，库存论真正作为一门理论发展起来，则是在本世纪50年代以后。在此期间，T.M.Whitin的《存贮管理的理论，1953》，K.I.Arrow的《存贮生产的数学理论，1958》以及A.P.Moran的《存贮理论，1959》等著名论著相继出版。并且作为解决实际问题的一门应用数学分支，随着库存模型的日趋复杂，所运用的数学方法也日趋多样。可以说，目前库存论的求解方法不仅包含了一些常见的数学方法，如微积分、概率统计、数值计算方法，而且也包含了运筹学中的不少分支，如排队论、Markov决策规划、计算机模拟及随机线性规划等。

存贮理论所研究的数学模型一般分为两大类，一类是确定性模型，这类模型不包含随机因素，因而问题比较简单；另一类是

带有随机因素的存贮模型，这类模型在二次大战后才受到人们重视并得到深入的研究。本章主要介绍后一类模型的基本数学理论与方法，故又称随机库存论。

§5.1 库存问题的基本要素

本节介绍库存论的一些基本概念，并通过一个确定性库存问题的求解来加深对这些基本概念的理解。

（一）库存问题的基本要素

一般的库存问题通常包含如下五个基本要素。

1. 需求

需求是库存系统的输出，需求量可以通过供销渠道获得．它可以是随机变量，如市场每天对某种商品的销售量，也可以是确定性的量，如自动生产线上每个班组对某种零件的需求量。

2. 补充（订货或生产）

货物的补充是库存系统的输入。库存物品的补充可以由工厂生产获得，也可以通过订货得到．从订货到物品进入库存，通常需要一段时间，人们将这段时间称为滞后时间。由于滞后时间的存在，管理者为了能在某一时刻及时补充库存物品，就必须提前订货，所提前的这段时间称为提前时间。滞后时间可以是随机变量，也可以是确定性的常量。

3. 存贮策略

库存论要研究的基本问题是物品何时补充及补充多少数量。任何一个满足上述要求的方案称为一个存贮策略，显然存贮策略依赖于当时的库存量．为了了解库存量，就要对库存进行检查。检查的办法一般有两种：一种是连续性盘点，即在任一时刻 t 检查库存量 $I(t)$；另一种是周期性盘点，即在时刻 kT（$k=0$，

1，2，…）检查库存量$I(kT)$，其中T是一个常量．称为检查周期．这两种检查办法产生的存贮策略常常采用（s，S）策略，s叫订货点，S叫库存水平．在连续性盘点中，一旦发现库存量降到$I(t)=s$就立即订货，其订货量$Q=S-s$（即将库存量补充到S）．因此，由s可以确定定货时间，并由Q确定定货量；同样在周期性盘点中，若在某一时刻kT的库存量$I(kT)\leqslant s$，即应立刻订货，其订货量$Q=S-I(kT)$．

4．费用

任何物品的存贮都要支出一定费用，这些费用包括：

a　订货费．它包含两部分，一部分是订购一次货物所需的订购费K（如手续费、派出人员出差费等，它是仅与订货次数有关的一种固定费用），二是货物的成本费Cx，其中C为货物的单价，x为订货数量，（成本费是与订货数量有关的可变费用）．通常把订货总费用表为

$$C(x)=\begin{cases} K+Cx, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

b　保管费．它包括货物的库存费和货物的损坏变质支出等费用．

c　缺货费．由于供不应求造成缺货而带来的损失费用，如停工停产造成的损失和罚款等．

5．目标函数

为了区分存贮策略的好坏，必须建立一个衡量标准，这个标准称为目标函数，通常把目标函数取为该策略的平均费用或平均利润，平均费用最小或平均利润最大的存贮策略称为最优存贮策略．为使读者对库存论的基本概念有较好的理解，以下我们先介绍一个确定性库存模型．

（二）一个确定性库存模型

该模型要求满足如下假设条件：

1. 库存系统运行时间是无限的并可进行周期性盘点。

2. 需求是连续的、均匀的，需求率D（单位时间的需求量）为常数。

3. 从订货到交货时间很短，可视为 0 。

4. 允许缺货，并设在单位时间内单位缺货损失费为π，对于未能满足需求的缺货，可在下批货物到达时予以补足，当补足的货物到达时无需经过库存，可直接输出。

5. 采用（s，S）策略，并设$t=0$时库存水平$I(0)$为S。

6. 费用为订货费、保管费、缺货费三项之和，且假设订货费不变，单位货物库存费不变。

7. 目标函数为单位时间的平均费用。

这种模型称为允许缺货的确定性模型。以下来寻求使单位时间的平均费用为最少的（s，S）策略。

记$I(\theta)$为时刻θ的库存水平。

设订货周期为t，则在一个周期中库存量由S变到 0 所需的时间长度为t_1(如图 5-1)。

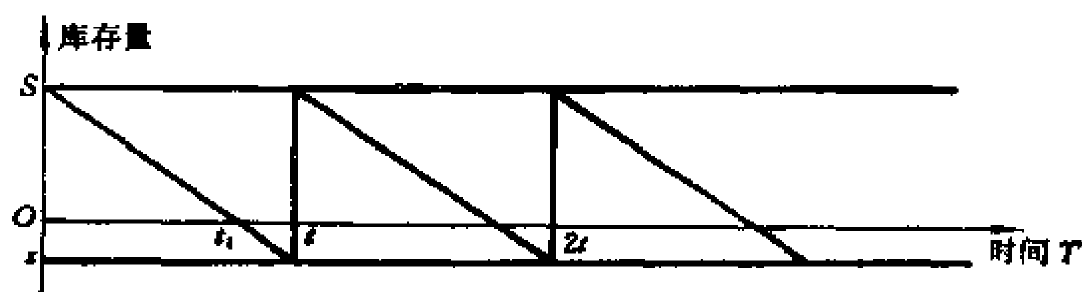


图 5-1

因在$0\leqslant\theta<t$间无订货，故对足够小的$\Delta\theta$有

$$I(\theta+\Delta\theta)=I(\theta)-D\Delta\theta$$

即

$$I'(\theta) = -D \qquad 0 \leqslant \theta < t$$

又由假设 $I(0)=S$，故

$$I(\theta) = S - D\theta \qquad 0 \leqslant \theta < t$$

在一个周期结束时库存量降为 s，即 $I(t)=s$，因而

$$Dt = S - s = Q.$$

注意到在 $0 \leqslant \theta < t$ 这段时间中库存量有时为正，有时为负，其中负值表示缺货量。若以 t_1 表示该系统在一个周期内库存水平下降到 0 时的对应时刻，则在一个周期中的平均库存量为

$$\frac{1}{t}\int_0^{t_1} I(\theta)d\theta = \frac{1}{t}\int_0^{t_1}(S-D\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{t}\left[St_1 - \frac{D}{2}t_1^2\right]$$

在一个周期中的平均缺货量为

$$-\frac{1}{t}\int_{t_1}^{t}(S-D\theta)\,d\theta = -\frac{1}{t}\left[S(t-t_1)\right.$$

$$\left.-\frac{D}{2}(t^2-t_1^2)\right]$$

单位时间内的总平均费用由下列三部份组成：

a 因为在一个周期中只有一次订货，订货量为 $Q=S-s$，故每个周期订货费用为 $K+CQ$，因而单位时间的平均订货费为 $\frac{K+CQ}{t}$。

b 设单件货物保管费为 h，则单位时间的平均保管费为

$$h\frac{1}{t}\int_0^{t_1} I(\theta)d\theta = \frac{h}{t}\left[St_1 - \frac{D}{2}t_1^2\right]$$

c 单位时间的平均缺货损失费为

$$-\frac{\pi}{t}\left[S(t-t_1) - \frac{D}{2}(t^2-t_1^2)\right]$$

故单位时间的平均总费用为

$$\frac{K+CQ}{t}+\frac{h}{t}\left[St_1-\frac{D}{2}t_1^2\right]-\frac{\pi}{t}\left[S(t-t_1)-\frac{D}{2}(t^2-t_1^2)\right]$$

因为

$$S=Q+s=Dt_1$$
$$Q=Dt$$

整理上式，消去 t_1，t 得到目标函数

$$F(Q,\ S)=\frac{KD}{Q}+CD+\frac{hS^2}{2Q}+\frac{\pi(Q-S)^2}{2Q}$$

求上式在 $Q>0$，$S>0$ 条件下的极小值。由极值必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial Q}=-\dfrac{KD}{Q^2}-\dfrac{hS^2}{2Q^2}+\dfrac{\pi}{2}\left[1-\dfrac{S^2}{Q^2}\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial S}=\dfrac{hS}{Q}+\dfrac{\pi}{Q}(S-Q)=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\pi Q^2-(\pi+h)S^2=2KD\\(\pi+h)S=\pi Q\end{cases}$$

解出驻点

$$Q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}\left(1+\frac{h}{\pi}\right)}$$

$$S^*=\frac{\pi}{\pi+h}Q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}\cdot\frac{\pi}{(\pi+h)}}$$

又因

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2}\right|_{(Q^*,S^*)}>0,\quad \left.\left[\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}-\left(\frac{\partial F}{\partial Q\partial S}\right)^2\right]\right|_{(Q^*,S^*)}>0$$

故 Q^*，S^*为极小值点。再由

$$s^*=S^*-Q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}\cdot\frac{\pi}{(h+\pi)}}\cdot\left[1-\left(\frac{\pi+h}{\pi}\right)\right]$$

$$=-\sqrt{\frac{2KDh}{\pi(\pi+h)}}$$

故最优存贮策略为

$$S^*=\sqrt{\frac{2\pi KD}{h(\pi+h)}},\quad s^*=-\sqrt{\frac{2KDh}{\pi(\pi+h)}}$$

如果让上述缺货模型中的单位缺货损失费 $\pi\to\infty$，则模型变为不允许缺货的模型，其相应的存贮策略由上述最优存贮策略立即可得

$$Q^*=S^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}},\quad s^*=0 \tag{5.1}$$

这就是库存论中著名的经济订购批量公式E.O.Q.(Economic Ordering Quantity)。

例5.1 设某单位自动装配线每年需要某型号电子管 48×10^4 个，生产电子管的工厂生产每个电子管成本费为5元，每开工一次的准备费用为 10^3 元，估计每年电子管的保管费为成本费的25%，若允许缺货且每缺一个电子管年损失1元，问每次生产的批量应多大?每年开工几次生产电子管才能使平均费用最小?

解 需求率

$$D=48\times10^4(\text{个/年})$$

总费用包括：

订购费（固定费用）$K=10^3$(元)

电子管单价 $C=5$ (元/个)

单件电子管保管费 $h=0.25\times5=1.25$(元/个·年)

单件电子管缺货损失费 $\pi=1$(元/个·年)

代入最优存贮策略可得

$$S^*=\sqrt{\frac{2\pi KD}{h(\pi+h)}}=\sqrt{\frac{2\times10^3\times48\times10^4}{1.25\times2.25}}=\sqrt{\frac{96\times10^7}{2.8125}}$$

$$\approx18475(\text{个})$$

$$s^*=-\sqrt{\frac{2KDh}{\pi(\pi+h)}}=-\sqrt{\frac{2\times10^3\times48\times10^4\times1.25}{2.25}}$$

$$=-\sqrt{\frac{120\times10^7}{2.25}}\approx-23094(\text{个})$$

每次生产批量

$$Q^*=S^*-s^*=18475+23094=41569(\text{个})$$

每年开工次数为

$$\frac{D}{Q^*}=\frac{48\times10^4}{41569}\approx12(\text{次})$$

若电子管不允许缺货，则

$$Q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}}=27713(\text{个})$$

每年开工次数

$$\frac{D}{Q^*}=17(\text{次})$$

一般来说在实际库存问题中，参数往往不是固定的常数，例如某种商品的需求量、日销售量以及滞后时间等等都可能不是一个常量。如果通过历史资料的统计可以看出它满足某种分布规律，则可以用随机变量来描述这种参数，从而构成随机库存模型。考虑到一般的随机库存系统由于实际背景不同，因而系统的构成要素和组成是多种多样的，从而使对应的随机库存模型也千变万化。限于篇幅，本章以下仅介绍其中的几个基本模型。此外，为了探讨随机库存系统的求解方法，本章除给出了通常的微积分方法外，还介绍了随机库存系统的马氏决策规划方法、排队论方法以及计算机模拟方法，以开阔读者的眼界，加强综合方法的训练。

§5.2 单周期随机库存模型

单周期库存模型又称单订货模型。模型假定周期末库存货物对下一个周期没有任何价值。这个问题还称为报童问题，因为报童手中今天的报纸若卖不完，明天就没有用了。该模型研究的是仅有一次机会存贮起来以供需求的产品，例如海产、山货、时装、生鲜食品和报纸等短寿产品。换句话说，由于产品的特殊性质或需求的特殊情况，以致产品不能存贮的一类问题。

（一） 模型的基本假设

本模型基本假设如下：

1. 在整个需求期内只订购一次货物，订购量为Q，订购费和初始库存量均为0，每单位产品的购价（成本）为C。

2. 需求量X为一连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$。当货物售出时，每单位产品的售价为U。

3. 需求期结束时，没有卖出的货物不存贮而折价卖出，单位售价为V（$V<U$）。

试求订购量Q，以使期望利润为最大。

（二） 模型的求解

在解决上述问题时，首先注意到，当需求量$X=x$为确定时，其售出货物数取决于需求量x和订购量Q，即

$$\text{售出货物数}=\begin{cases} x, & \text{若 } x\leqslant Q \\ Q, & \text{若 } x>Q \end{cases}$$

故此时利润F同样是Q和x的函数，并有

$$F(Q,\ x)=\begin{cases} Ux+V(Q-x)-CQ, & \text{若 } x\leqslant Q \\ UQ-CQ, & \text{若 } x>Q \end{cases}$$

但实际上X为随机变量，故对于给定的Q，其期望利润为

$$
\begin{aligned}
E[F(Q)]&=\int_0^Q [Ux+V(Q-x)-CQ] f(x)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_Q^{\infty} (UQ-CQ) f(x)\mathrm{d}x \\
&=\int_0^Q [(U-V)x+VQ] f(x)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_Q^{\infty} UQf(x)\mathrm{d}x-CQ \\
&=(U-C)Q-(U-V)\int_0^Q (Q-x) f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

为求最优订购量Q，对上式求关于Q的一次和二次导数，并由

$$
\frac{\mathrm{d}E[F(Q)]}{\mathrm{d}Q}=(U-C)-(U-V)\int_0^Q f(x)\mathrm{d}x=0
$$

可得

$$
\int_0^Q f(x)\mathrm{d}x=\frac{U-C}{U-V} \tag{5.2}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2E[F(Q)]}{\mathrm{d}Q^2}=-(U-V)f(Q)<0
$$

综合上述二式，表明满足（5.2）式的Q具有最大的期望利润。

例5.2 设某商品在销售旺季，其需求量服从在[10，15]（单位：公斤）中的均匀分布律．商品的进货价格为每公斤12.5元，售价为每公斤15元．若旺季结束时，商品仍有剩余，则以每公斤11.25元处理掉．若不计缺货损失，订购费用亦忽略不计，试求订购数Q，以使期望利润为最大。

解 由上述推导知，使期望利润为最大的Q，应满足（5.2）式，即有

$$
\int_{10}^Q \frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{15-12.5}{15-11.25}
$$

由此可解得该问题的最优订购量$=13\frac{1}{3}$kg。

§5.3 多周期随机库存模型

多周期库存模型是考虑了时间因素的一种随机动态存贮模型，它与单周期库存模型的不同之处在于每个周期的期末库存货物对于下一周期仍然可用。对于这样的库存系统，其库存货物的检测方式有两种：连续性盘点与周期性盘点，而订购策略常采用（s，S）策略。例如在连续性盘点过程中，一旦发现库存量下降到s（再订购点）时，即提出订货要求，要求订购$Q=S-s$的货物。而从发出订货要求到所订购的补充货物全部进入库存通常需要一段滞后时间L，L一般是确定性常数或随机变量。此外，在滞后时间间隔（又称滞后期）内，由于外界仍有需求，因而库存量将继续下降，甚至可能发生缺货。对于发生缺货的情形，一般又有两种常见的处理方式可供挑选：（1）当存货售完后，把未能满足的需求积累起来，作为缺货登记，待到货后再交售，它称为"缺货预约处理方式"；（2）对于滞后期内的缺货，不予理会，它称为"缺货不供应处理方式"。本节介绍其中的二类模型。

（一）模型 I

1. 模型的基本假设为

（1）周期性盘点，采用（s，S）策略，每次订购费为K，每单位产品的购价为C。订购的货物可立即进货（即滞后时间为零）。

（2）在每个周期内的需求量X为离散型随机变量，其概率分布列为$P(X=i)=p_i$，$i=0$，1，2，…。单件货物的保管费为h。

（3）在每个周期内，若发生缺货，采用缺货不供应处理方式，但需注意其缺货的损失，单件缺货损失费为π。故所耗费的

总费用应包括订货费、存贮保管费和缺货损失费三项。

试求在每个周期内使期望总费用达到最小的订购策略（s，S）。

2. 模型的求解

设订货量为Z，则订货费用为

$$C(Z)=\begin{cases} K+CZ, & Z>0 \\ 0, & Z=0 \end{cases}$$

其中K为订购费用，C为货物单价。

又设订货量与原有库存量之和为y，单件保管费用为h，则由于需求量X是随机变量，因而保管费用也是随机变量。设保管费用为$H(y, X)$，则

$$H(y, X)=\begin{cases} 0, & X\geqslant y \\ h(y-X), & X<y \end{cases}$$

保管费用的期望值：

$$EH(y, X)=\sum_{i=0}^{y} h(y-i)p_i$$

缺货损失费用也是个随机变量，它等于

$$P(y, X)=\begin{cases} \pi(X-y), & X>y \\ 0, & X\leqslant y \end{cases}$$

它的期望值

$$EP(y, X)=\sum_{i=y+1}^{\infty} \pi(i-y)p_i$$

其中π是单件缺货损失费。

记

$$\begin{aligned} L(y) &= EH(y, X)+EP(y, X) \\ &= \sum_{i=0}^{y} h(y-i)p_i+\sum_{i=y+1}^{\infty} \pi(i-y)p_i \end{aligned}$$

考虑采用，(i, y) 策略，于是当初始库存量为 i 时，总费用函数为

$$g(y|i)=\begin{cases} L(y) & ，当 y=i 时 \\ K+C(y-i)+L(y) & ，当 y>i 时 \end{cases}$$

使 $g(y|i)$ 达到极小值的 y 便是最优库存水平。

令

$$f(i)=\min_{y\geq i} g(y|i)$$

$$=\min\begin{cases} g(i|i) \\ \min\limits_{y>i} g(y|i) \end{cases}$$

$$=\min\begin{cases} L(i) \\ K-Ci+\min\limits_{y>i}[Cy+L(y)] \end{cases}$$

先来求最优存贮策略中的库存水平 S，我们可设上式中的最小值不等于 $L(i)$，否则因 $y=i$ 就不需要订货，于是问题变为求 y 使 $Cy+L(y)$ 达到极小。

我们先证明 $(Cy+L(y))$ 为凸函数。Cy 为线性函数显然是凸函数，又

$$\begin{aligned} L(y+1)-L(y)&=\sum_{i=0}^{y+1} h(y+1-i)p_i+\sum_{i=y+2}^{\infty}\pi(i-y-1)p_i-\sum_{i=0}^{y} h(y-i)p_i \\ &\quad-\sum_{i=y+1}^{\infty}\pi(i-y)p_i \\ &=h\sum_{i=0}^{y} p_i-\pi\sum_{i=y+1}^{\infty} p_i \\ &=(h+\pi)\sum_{i=0}^{y} p_i-\pi \qquad (5.3) \end{aligned}$$

同理

$$L(y)-L(y-1)=(h+\pi)\sum_{i=0}^{y-1}p_i-\pi$$

故

$$L(y+1)-L(y)\geqslant L(y)-L(y-1)$$

或有

$$L(y)\leqslant\frac{L(y+1)+L(y-1)}{2}$$

所以，$L(y)$ 也为凸函数。因为两个凸函数之和仍为凸函数，故 $Cy+L(y)$ 为凸函数，并应存在一个全局的极小值。

设 $y=S$ 是 $(Cy+L(y))$ 的极小值点，即

$$\min_y[Cy+L(y)]=CS+L(S)$$

则必有

$$C(S+1)+L(S+1)\geqslant CS+L(S)$$

即

$$L(S+1)-L(S)\geqslant -C$$

以（5.3）式代入上式有

$$(h+\pi)\sum_{i=0}^{S}p_i\geqslant\pi-C$$

或有

$$\sum_{i=0}^{S}p_i\geqslant\frac{\pi-C}{h+\pi}\tag{5.4}$$

因而库存水平 S 应取满足上述不等式的最小正整数。

再来求订货点 s。由于在（s，S）的策略意义下，当初始库存量 $i=s$ 时，由假设应不订货，因此，$y=s$ 时的总费用（此时订货量为 0）为 $L(s)$。它应小于 $y=S$（此时订货量为 $S-s$）的总费用 $K+C(S-s)+L(S)$，即

$$L(s) \leqslant K + C(S-s) + L(S) \tag{5.5}$$

另一方面，当初始库存量 i 小于 s 时应订货，故当 (5.5) 中的 s 成为 $s-1$ 时，不等号应反号. 因此，最佳订货点 s 是使 (5.5) 成立的最小正整数。

上述最优存贮策略 (s, S) 的求法可归纳如下：

（1）由(5.4)求库存水平 S。对于通常的离散型随机变量 X，$\sum_{i=0}^{S} p_i$ 可以通过查表得到。

（2）由 (5.5) 求订货点 s，或者换成 (5.5) 的等价形式

$$L(s) + Cs \leqslant K + CS + L(S) \tag{5.6}$$

求 s。

例5.3 设某工厂利用塑料作原料制成产品出售。已知对原料的需求量 X 为随机变量，其分布列为 $p_i = P(X=i) = \frac{1}{5}$，$i=0, 1, 2, 3, 4$（箱）又已知缺货费 $\pi=10$(元/箱)，塑料单价 $C=0.1$(元/箱)，塑料单件保管费 $h=5$(元/箱)，塑料订货订购费 $K=4$ 元。试求使平均费用为最小的最优存贮策略 (s, S)。

解 由于

$$\sum_{i=0}^{S} p_i = \sum_{i=0}^{S} \frac{1}{5} = \frac{S+1}{5}$$

$$\frac{\pi - C}{h+\pi} = \frac{9.9}{15} = 0.66$$

故满足 $\frac{S+1}{5} \geqslant 0.66$ 的最小整数 $S=3$(箱)。又

$$L(y) = \begin{cases} h(y-2), & \text{当 } y \geqslant 4 \\ \frac{h}{5}\sum_{i=0}^{y}(y-i) + \frac{\pi}{5}\sum_{i=y+1}^{4}(i-y), \\ \qquad y = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

对 $S=3$， $K=4$， $C=0.1$， $h=5$， $\pi=10$，（5.6）式右端有

$$K+CS+L(S)=4+0.1\times 3+\sum_{i=0}^{3}(3-i)+2(4-3)$$
$$=12.3$$

同样可计算出 $L(2)=9$， $L(1)=13$，于是有

$$L(2)+0.1\times 2=9.2<12.3$$
$$L(1)+0.1\times 1=13.1>12.3$$

因此， $s=2$ 是使（5.6）成立的最小整数。故最优存贮策略为（2， 3）。

模型Ⅰ是在周期性盘点，订货后可立即进货的情况下来讨论的，以下介绍的模型Ⅱ和模型Ⅲ则是在连续性盘点时，从发出订货单到补充货物进入库存之间需要一段时间 L，而 L 分别为确定量和随机变量这两种情况下来讨论的。

（二）模型Ⅱ

1. 模型的基本假设为

（1）连续性盘点，采用（s， S）策略，每次订购费为 K，每单位产品的购价为 C，单件货物的存贮保管费为 h。

（2）在 T 时段内（通常取一年）需求量 X 为随机变量，期望需求量 $E(X)$ 为已知。

（3）滞后时间 L 为确定性常数，但滞后期的需求量 X_L 为随机变量，概率分布列 $P(X_L=i)=p_i(i=0, 1, 2, \cdots)$ 已知，并设 $X_L<Q=S-s$。（否则即使补充货物到达后，也不能使库存水平达到 S，从而造成系统不断脱销。）

（4）在滞后期内若发生缺货，则采用缺货不供应处理方式，但需计算缺货损失，设单件缺货损失费为 π。故所耗总费用包括：订货费、存贮保管费和缺货损失费三项。

试求在T时段（通常取一年）内期望总费用为最小时的订购策略（s，S）。

2. 模型求解

由于在T时段内的期望总需求量为$E(X)$，而每订购一次由于采用（s，S）策略，订购量为$Q=S-s$，故T时段内的期望周期数为$E(X)/Q$，T时段内的期望订购费用为$K\cdot E(X)/Q$。

若以$E(B)$表示每个周期内的期望缺货数，则T时段内的期望缺货损失费用为

$$\pi\cdot\frac{E(X)}{Q}\cdot E(B)=\pi\cdot\frac{E(X)}{Q}\cdot\sum_{i=s}^{\infty}(i-s)p_i$$

至于存贮费用，则可通过在一个周期内滞后期间的平均存贮量$\bar{I}_L$及非滞后期间的平均存贮量$\bar{I}_N$的计算来解决。由于每个周期的订货量为Q，而滞后期的期望需求量为$E(X_L)$，所以滞后期占整个周期的期望百分比为$E(X_L)/Q$，故T时段内的期望存贮费用为

$$h\left[\frac{E(X_L)}{Q}E(\bar{I}_L)+\left(1-\frac{E(X_L)}{Q}\right)E(\bar{I}_N)\right]$$

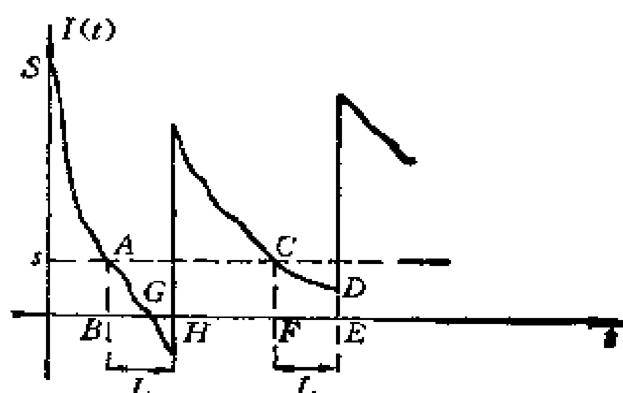


图 5-2

以下来推导$E(\bar{I}_L)$及$E(\bar{I}_N)$的表达式。首先注意到在每个周期中，其滞后期的初始库存量为s，而滞后期终止时的库存量则取决于滞后期内的需求X_L。由图5-2得知，当$X_L<s$时，滞后期

内的存贮数可用梯形面积 $CDEF$ 表示，即等于 $\frac{L}{2}[s+(s-X_L)]$，当 $X_L>s$，即发生缺货时，滞后期内的存贮数等于 ΔABG 面积，但为简化计算，用 ΔABH 面积来代替（这等于假设在订货到达前的瞬间才发生脱销）。于是，滞后期内的平均存贮量为

$$\bar{I}_L=\begin{cases}\frac{L}{2}[s+(s-X_L)] & X_L<s\\ \frac{s}{2}L & X_L\geqslant s\end{cases}$$

从而有滞后期间的期望平均存贮量为

$$E(\bar{I}_L)=\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{2}[s+(s-i)]p_i+\sum_{i=s+1}^{\infty}\frac{s}{2}p_i$$

$$=\frac{1}{2}\left[s+\sum_{i=0}^{s}(s-i)p_i\right] \tag{5.7}$$

现在考虑在一个存贮周期内的非滞后期部分。由于滞后期间的期望需求为 $E(X_L)=\sum_{i=0}^{\infty}ip_i$，故由图 5-2 知，非滞后期的初始库存量为 $s+Q-E(X_L)$，终了库存量为 s，于是同理可得非滞后期的期望平均存贮量 $E(\bar{I}_N)$ 为

$$E(\bar{I}_N)=\frac{1}{2}[s+Q-E(X_L)+s]$$

$$=\frac{1}{2}[2s+Q-E(X_L)] \tag{5.8}$$

综合（5.7）与（5.8）式可得一周期内的期望存贮量 $E(\bar{I})$ 为

$$E(I)=\frac{E(X_L)}{Q}E(\bar{I}_L)+\left(1-\frac{E(X_L)}{Q}\right)E(\bar{I}_N)$$

$$=\frac{E(X_L)}{2Q}\left[s+\sum_{i=0}^{s}(s-i)p_i\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{E(X_L)}{Q}\right)[2s+Q-E(X_L)]=s+\frac{Q}{2}$$

$$-E(X_L)-\frac{E(X_L)}{2Q}\sum_{i=s}^{\infty}(s-i)p_i$$

T时段内所耗的期望总费用为期望订货费、期望存贮费与期望缺货损失费之和，即有

$$E(\pi)=\frac{K\cdot E(X)}{Q}+\pi\cdot\frac{E(X)}{Q}\cdot\sum_{i=s}^{\infty}(i-s)p_i$$

$$+h\left[s+\frac{Q}{2}-E(X_L)-\frac{E(X_L)}{2Q}\sum_{i=s}^{\infty}(s-i)p_i\right]$$

$$=\frac{K\cdot E(X)}{Q}+h\left[s+\frac{Q}{2}-E(X_L)\right]$$

$$+\left[\frac{h\cdot E(X_L)}{2Q}+\frac{\pi\cdot E(X)}{Q}\right]\sum_{i=s}^{\infty}(i-s)p_i$$

$$=\frac{K\cdot E(X)}{Q}+h\left[s+\frac{Q}{2}-E(X_L)\right]$$

$$+A\cdot\sum_{i=s}^{\infty}(i-s)p_i \tag{5.9}$$

其中

$$A=\frac{1}{2Q}[h\cdot E(X_L)+2\pi\cdot E(X)]$$

仿照模型 I 的方法同理可证$E(\pi(s))$关于s为凸函数，从而存在一个全局的极小值，不妨仍设为s，则该s必须满足

$$E[\pi(Q,\ s)]\leqslant E[\pi(Q,\ s-1)] \tag{5.10}$$

$$E[\pi(Q,\ s)]\leqslant E[\pi(Q,\ s+1)] \tag{5.11}$$

以（5.9）式代入（5.10）经化简可得

$$\sum_{i=0}^{s-1}p_i\leqslant 1-\frac{h}{A}=1-\frac{2Qh}{h\cdot E(X_L)+2\pi\cdot E(X)} \tag{5.12}$$

以（5.9）式代入（5.11），经化简可得

$$\sum_{i=0}^{s} p_i \geqslant 1-\frac{h}{A}=1-\frac{2Qh}{h\cdot E(X_L)+2\pi\cdot E(X)} \tag{5.13}$$

设

$$R(Q)=1-\frac{h}{A}=1-\frac{2Qh}{h\cdot E(X_L)+2\pi\cdot E(X)} \tag{5.14}$$

则综合（5.12）和（5.13）式有

$$\sum_{i=0}^{s-1} p_i \leqslant R(Q) \leqslant \sum_{i=0}^{s} p_i \tag{5.15}$$

显然，对于给定的Q，最优值s^*是使累积概率超过临界值$R(Q)$的最小s值．对于Q的最优值之必要条件，则可由期望费用$E[\pi(Q,\ s)]$对Q的求导并使其等于零求得

$$Q^*=\left\{\frac{2K\cdot E(X)}{h}+\left[E(X_L)+\frac{2\pi\cdot E(X)}{h}\right]\sum_{i=s}^{\infty}(i-s)p_i\right\}^{1/2} \tag{5.16}$$

下面给出一种可以同时求解最优值Q^*与s^*的简易算法，该算法的步骤如下：

（1）计算滞后期间的期望需求量$E(X_L)$，找出滞后期间的最大需求量D_L，取$s\Leftarrow s_0$，$E(X)\Leftarrow E(X_L)$，并计算$Q=\sqrt{\dfrac{2K\cdot E(X)}{h}}$。

（2）由所得之Q按（5.14）式计算R，再按（5.15）式求出R对应的s_1。

（3）若$s_1=s$，则终止计算，打印并输出s_1和Q；否则取$s\Leftarrow s_1$，并按（5.16）式计算Q，再转入步骤（2）。

至于上述算法的正确性，留作习题由读者自行论证。

例5.4 设一件货物的订购费用是 20 元，每周保管费为 1 元，每件缺货损失为 5 元，滞后时间为 1 周（确定常数），每周需求量的概率分布见表 5-1

表 5-1

i	$P(X_L=i)=p_i$	累积概率 $\sum_{i=0}^{i} p$
10	0.30	0.30
11	0.25	0.55
12	0.20	0.75
13	0.15	0.90
14	0.10	1.00

试求最优订购策略（s，S）。

解 由上述算法步骤知有

（1）$E(X_L)=\sum_{i=10}^{14} ip_i=11.5$，$D_L=14$，故取 $s=14$，$E(X)=E(X_L)=11.5$，并计算

$$Q=\sqrt{\frac{2\times 11.5\times 20}{1}}=21.45$$

（2）
$$R=1-\frac{2\times 21.45\times 1}{1\times 11.5+2\times 5\times 11.5}=0.661$$

由 $\sum_{i=10}^{s_1-1} p_i\leqslant 0.661\leqslant\sum_{i=10}^{s_1} p_i$，可解得 $s_1=12$。

（3）因为 $s_1=12\neq s$，故取新的 s 为 12，并由此按（5.16）式计算新的 Q，

$Q_1=$

$$\sqrt{\frac{2\times 11.5\times 20}{1}+\left(11.5+\frac{2\times 5\times 11.5}{1}\right)(1\times 0.15+2\times 0.10)}$$

$=22.45$

（4）对（3）计算所得 $Q_1=22.45$，按（5.14）式求新的 R_1，可得

$$R_1=1-\frac{2\times22.45\times1}{1\times11.5+2\times5\times11.5}=0.645$$

（5）由 $\sum_{i=10}^{s_1-1}p_i\leqslant0.645\leqslant\sum_{i=10}^{s_1}p_i$，可解得 $s_1=12$

（6）由于 $s=s_1=12$，程序终止，并得到最优解 $s^*=12$' $Q^*=22.45$。故

$$S^*=s^*+Q^*=34.45$$

结论：最优订购策略为（12，34.45）。

3．需求为连续性时

在前述模型Ⅱ的基本假设中，若将离散性需求改为连续性需求，并设滞后期间的需求 X_L 为连续型随机变量，其密度函数 $f(X_L)$ 为已知，其余假设保持不变，下面来讨论在期望费用最小时的订购策略的求解。

容易得到，滞后期间的期望需求量 $E(X_L)$ 和期望存贮量 $E(\bar{I})$ 分别为

$$E(X_L)=\int_0^\infty X_Lf(X_L)\mathrm{d}X_L$$

$$E(\bar{I})=s+\frac{Q}{2}-E(X_L)+\frac{E(X_L)}{2Q}\int_s^\infty(X_L-s)\cdot f(X_L)\mathrm{d}X_L$$

T 期间的期望缺货数为

$$\frac{E(X)}{Q}\cdot E(B)=\frac{E(X)}{Q}\int_s^\infty(X_L-s)f(X_L)\mathrm{d}X_L$$

故期望费用有

$$E[\pi(Q,s)]=\frac{k\cdot E(X)}{Q}+h\left[s+\frac{Q}{2}-E(X_L)\right]+\left[\frac{h\cdot E(X_L)}{2Q}+\frac{\pi\cdot E(X)}{Q}\right]\cdot\int_s^\infty(X_L-s)f(X_L)\mathrm{d}X_L$$

由$\dfrac{\partial E[\pi(Q,\ s)]}{\partial Q}=0$可解得

$$Q^{*}=\left\{\frac{2K\cdot E(X)}{h}+\left[E(X_L)+\frac{2\pi\cdot E(X)}{h}\right]\int_{s}^{\infty}(X_L-s)f(X_L)\mathrm{d}X_L\right\}^{1/2} \tag{5.17}$$

由$\dfrac{\partial E[\pi(Q,\ s)]}{\partial s}=0$可解得

$$h=\frac{h\cdot E(X_L)+2\pi\cdot E(X)}{2Q}\int_{s}^{\infty}f(X_L)\mathrm{d}X_L$$

以$\int_{s}^{\infty}f(X_L)\mathrm{d}X_L=1-\int_{0}^{s}f(X_L)\mathrm{d}X_L$代入上式可得

$$\int_{0}^{s}f(X_L)\mathrm{d}X_L=1-\frac{2Qh}{h\cdot E(X_L)+2\pi\cdot E(X)}\triangleq R \tag{5.18}$$

算法的迭代求解过程和需求为离散时的算法步骤有两点不同：首先是将方程换为方程（5.17）与（5.18），其次是将第三步作下述修改：当新的试算值接近前一个计算值时，便停止计算。

例 5.5 设

$$f(X_L)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 10\leqslant X_L\leqslant 14\\[2ex] 0, & 其他\end{cases}$$

其他假设均与例5.4相同。试求在期望费用最小时的订购策略$(s,\ S)$。

解 （1）滞后期间需求为

$E(X_L)=\int_{10}^{14}\frac{1}{4}X_L\mathrm{d}X_L=12$，取$s=14$，初始

$$Q=\sqrt{\frac{2\times 12\times 20}{1}}=21.91$$

（2）对应的

$$R = 1 - \frac{2 \times 21.91 \times 1}{1 \times 12 + 2 \times 5 \times 12} = 0.668$$

由 $\int_{10}^{s} \frac{1}{4} \mathrm{d}X_L = 0.668$ 可解得 $s_1 = 12.672$

（3）因为 $s = 14$ 与 $s_1 = 12.672$ 相差很大，故取新的 $s = 12.672$，并按（5.17）式计算新的 Q_1。

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 \times 12 \times 20}{1} + \left(12 + \frac{2 \times 5 \times 12}{1}\right) \int_{12.672}^{\infty} (X_L - 12.672) \frac{1}{4} \mathrm{d}X_L}$$

$$= 22.563$$

（4）对上述计算的 $Q_1 = 22.563$，再按（5.18）式求新的 R_1。

$$R_1 = 1 - \frac{2 \times 22.563}{132} = 0.6581$$

（5）由 $\int_{10}^{s_1} \frac{1}{4} \mathrm{d}X_L = 0.6581$ 可解得 $s_1 = 12.632$

（6）因为 $|s - s_1| = |12.672 - 12.632| < 10^{-1}$，程序终止，得到最优 $s^* = 12.632$，$Q^* = 22.563$，故

$$S^* = s^* + Q^* = 35.195$$

（三）模型Ⅱ

1. 模型的基本假设为

（1）连续性盘点，采用（s，S）策略，每次订购费为 K，每单位产品的购价为 C。单件货物的存贮保管费为 h。

（2）在 t 时段内的需求量为随机变量，其概率分布 $P_t(X)$ 为已知，年度平均需求量 D 为常量。

（3）滞后时间 θ 为随机变量，其概率分布 $P(\theta)$ 为已知。

（4）在滞后期内发生缺货，则采用缺货不供应处理方式，但需注意其缺货损失，设单件缺货损失费为 π。故年度所耗费用包括：订货费、存贮保管费和缺货损失费三项。

（5）由于需求和滞后时间都是随机的，故应设置缓冲存贮量B，以减少发生缺货的现象。（如图5-3中，s为订货点，B为缓冲存贮量，一般应有$B<s<S$。X_1，X_2为滞后时间。）求缓冲存贮量B和（s，S）策略，使目标函数为最小。

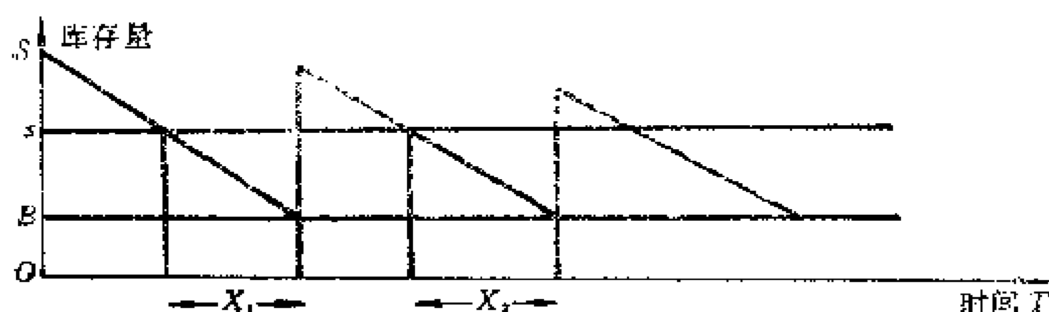


图 5-3

2．模型求解

先假定不允许缺货，因而先按确定性不缺货模型（5.1)式求出订购量$Q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}}$。若全年分n_0次订购，当每次订购量为Q^*，则$n_0=\frac{D}{Q^*}$。

求最优存贮策略中的s，考虑到订购点s除应满足滞后时间内的平均需求D_r外还要维持缓冲存贮量B，由于滞后时间是随机的，设平均滞后时间为μ，则

$$s=D_r+B=\mu\rho+B$$

其中$\mu=E(\theta)$为已知，当库存量降到s时应订货。由于滞后时间延长或因需求增加而引起的缺货概率记作P_s，则

$$P_s=\sum_{\theta}P(\theta)F_\theta(s)$$

其中$P(\theta)$为滞后θ天的概率。$F_\theta(s)$表示订货为s（即库存量为s时）而在θ天内需求$X>s$的概率，而$F_\theta(s)=\sum_{X>s}P_\theta(X)$。

一次缺货损失费的期望值为πP_s，则n_0次缺货损失费的期望值为$n_0\pi P_s$，每年保管费为$\frac{1}{2}(Q^*+B)h$。由于θ^*是根据保管费和订货费之和的平均费用最小求出的，因此现在只需考虑维持缓冲库存量的保管费及缺货损失费期望值两者之和为最小。即由$\min\limits_{s}[n_0\pi P_s+h(s-\mu\rho)]$确定$B^*$，再由$s^*=\mu\rho+B^*$确定$s^*$。然后由$Q^*+s^*=S^*$，即可求出最优存贮策略$(s^*, S^*)$。

例5.6 某厂生产汽车需用钢材，t时段内需求X的概率$P_t(X)$服从Poisson分布

$$P_t(X)=\frac{e^{-\rho t}(\rho t)^x}{X!}$$

每天平均需求为1吨，即$\rho=1$，年平均需求量$D=365$吨，则t时间内需求为X的概率

$$P_t(X)=\frac{e^{-t}t^x}{X!}$$

滞后时间θ服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，其中$\mu=15$天，$\sigma^2=1$故有

$$P(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\theta-15)^2/2}$$

又已知年保管费为每吨0.5元，每次订购费为15元，缺货损失费每吨50元。求使平均费用达到最小的订购量Q^*，订购点s^*和库存水平S^*，并求出每年的订购次数n_0。

解 由E.O.Q公式

$$Q^*=\sqrt{\frac{2\times365\times15}{0.5}}\doteq148(\text{吨})$$

$$n_0=\frac{D}{Q^*}=2.5(\text{次})$$

Q，$P(\theta)$，θ天内平均需求$\rho\theta$之计算见表5-2。

表 5-2

滞后时间 θ	滞后时间概率 $P(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\theta-15)^2/2}$	θ天内平均需求$\rho\theta$
13	0.05	13
14	0.24	14
15	0.40	15
16	0.24	16
17	0.05	17

θ天内需求$X>s$的概率$F_\theta(s)=\sum\limits_{X>s}\frac{e^{-\theta}\theta^X}{X!}=1-\sum\limits_{X=0}^{s}\frac{e^{-\theta}\theta^X}{X!}$

见表5-3。

表 5-3

θ \ $F_\theta(s)$ \ s	15	21	22	23	24	25	26	31
13	0.236	0.014	0.008	0.004	0.002	0.001	0	0
14	0.331	0.029	0.017	0.009	0.005	0.003	0.001	0
15	0.432	0.053	0.033	0.019	0.011	0.006	0.003	0
16	0.533	0.089	0.058	0.037	0.022	0.013	0.008	0
17	0.629	0.138	0.095	0.063	0.040	0.025	0.015	0.001

$P(\theta)F_\theta(s)$ 之计算见表5-4。

表 5-4

θ \ $P(\theta)F_\theta(s)$ \ s	15	21	22	23	24	25	26	31
13	0.012	0.000	0	0	0	0	0	0
14	0.079	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0	0
15	0.173	0.021	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001	0
16	0.128	0.021	0.014	0.008	0.005	0.003	0.002	0
17	0.031	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0
Σ	0.423	0.056	0.039	0.021	0.012	0.007	0.004	0

由$P_s=\sum_{13}^{17}P(\theta)F_\theta(s)$，$B=s-\rho\mu$，$\mu=15$，费用$=n_0\pi P_s+hB$可得表5-5。

表 5-5

s	15	21	22	23	24	25	26	31
P_s	0.423	0.056	0.036	0.021	0.012	0.007	0.004	0
B	0	6	7	8	9	10	11	16
费用	52.875	10.00	8.000	6.63	6.00	5.38*	6.00	8.00

由表5-5知该厂订购量$Q=148$吨，订购点$s=25$吨，缓冲量$B=10$吨，库存水平$S=Q+s=173$吨为最优库存策略。

§5.4* 多阶段随机库存模型求解的MDP方法

在前述各类随机存贮模型中，存贮策略均采用（s，S）策略，即在周期性（或连续性）盘点时，若在某一时刻发现系统的库存量I小于等于订货点s时，就必须将其恢复到库存水平S上去，亦即需订货$Q=S-I$。用决策函数的观点来看，系统状态（库存量）i与订货量f将满足如下的函数关系式

$$f(i)=\begin{cases}0, & i>s\\ Q & i\leqslant s\end{cases}$$

这是一类特殊形式的决策函数。但在许多实际问题中，我们还可考虑形式更为广泛的决策函数。例如我们会遇到这样一类随机存贮系统，当决策者在某一时段t观察到系统的状态i和采取了某种行动方案a后，下一时段系统的状态概率特性将与t以前系统的状态及所采取的行动历史无关，且与时刻t也无关，即该系统是一个具有齐次Markov性的随机库存系统。此时我们可采用

Markov决策规划（MDP）的有关理论和方法来求解，而得到的决策函数将具有更为广泛的形式。有关MDP的基本概念可参见§6.2，本节仅通过一个应用问题的求解来介绍运用MDP方法求解随机库存系统的基本思想和方法。

（一）策略迭代算法

设Y_t表示t时刻所观察到的系统状态，Δ_t表示该时刻决策者所采取的行动。若随机过程$\{Y_t, \Delta_t, t=0, 1, 2, \cdots\}$为齐次马氏过程，且为遍历，则可用下述MDP算法来求解应用问题。其中$G(f)$表示采用平稳策略f^∞时决策者在每一时段的平均期望总费用；$r(i, f(i))$表示决策者在系统处于状态i，采用行动$f(i)$时的报酬；$P(j|i, f(i))$表示系统在某一时刻处于状态i，决策者采用行动$f(i)$后下一时刻系统处于状态j的概率；$V(i)$为状态i对应的中间变量。该策略迭代算法步骤如下：

1．任取一个初始决策函数$f(i)$，$i\in S$，（S为状态空间设$S=\{0, 1, 2, \cdots, I\}$），令$v(I)=0$，求解下述线性方程组

$$G(f)+v(i)=r(i, f(i))+\sum_{j\in S}P(j|i, f(i))v(j) \quad i\in S \tag{5.19}$$

2．以步骤1求得的$v(i)(i\in S)$代入下式，通过极小（大）化运算来寻求一个比f更好的决策函数$g(i)$，$i\in S$。亦即对极小化运算有

$$\min_{a\in A(i)}\left\{r(i, a)+\sum_{j\in S}P(j|i, a)v(j)-v(i)\right\}$$

$$=r(i, g(i))+\sum_{j\in S}P(j|i, g(i))v(j)-v(i)$$

$$\leqslant r(i,\ f(i))+\sum_{j\in S}P(j|i,\ f(i))v(j)-v(i)$$

$$i\in S \tag{5.20}$$

对于极大化运算则有

$$\max_{a\in A(i)}\left\{r(i,\ a)+\sum_{j\in S}P(j|i,a)v(j)-v(i)\right\}$$

$$=r(i,\ g(i))+\sum_{j\in S}P(j|i,\ g(i))v(j)-v(i)$$

$$\geqslant r(i,\ f(i))+\sum_{j\in S}P(j|i,\ f(i))v(j)-v(i)$$

$$i\in S$$

其中对于决策者的收益目标可采用极大化运算，对于决策者的支出目标则应采用极小化运算。

3. 若对所有 $i\in S$，(5.20) 式均成立等号，则终止运算，并有结论：f^{∞}为最优平稳策略，相应的$G(f)$为最优值函数．它表示决策者在采用平稳策略f^{∞}后所付出（收入）的最优平均期望总费用；若至少存在一个 $i\in S$，使 (5.20) 式成为严格不等式，则以 g 代替 f，并转入步骤1，此时有$G(g)>G(f)$。

上述算法的正确性可参见文献[25]。

(二) 应用举例

例 5.7 某工厂考虑一设备的订货问题，设（1）工厂将根据每周的库存量，确定本周的订货策略。若每周需订货，则需订货费$K=10$千元，而每台设备的成本费25千元。（2）该设备每周需求量D服从均值为 $\lambda=1$ 的Poisson分布。（3）每周缺一台设备的损失费$C_2=50$千元，单位库存费C_1忽略不计。试确定工厂每周的订货策略，以使其每周平均期望总费用达到最小。

解 我们认为该系统服从齐次马氏性，因而可用 MDP 的上

述算法来求解。为此应首先根据上述应用问题的特性来定义五元体。

（1）由于每周需求量D服从均值为1的Poisson分布，故在一个单位时段内，应有

$$P(D=k)=\frac{1}{k!}e^{-1}$$

$$P(D\geqslant 4)=1-\sum_{k=0}^{3}P(D=k)=1-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)e^{-1}$$

$$\approx 0.02$$

由上得知，每周设备的需求量超过3台的可能性很小，可不予考虑。故可认为该系统的状态（库存量）集$S=\{0,1,2,3\}$。

对于每个状态i应采取的行动是订购a_j台设备。设$a_j=j$，则由上述分析知各状态的行动集应有$A(0)=\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$，$A(1)=\{a_0,a_1,a_2\}$，$A(2)=\{a_0,a_1\}$，$A(3)=\{a_0\}$。下面来分别计算该系统的转移概率矩阵P及报酬函数$r(f)$的各元素值。

注意到当现有库存量$I=1$，并采用不订货a_0的行动时，下一周库存量为0这一事实当且仅当本周需求量$D\geqslant 1$（此时除现有的一台设备作交货外，其他需求量作缺货处理），因而有

$$P(0|1,a_0)=P(D\geqslant 1)=1-\frac{1}{0!}e^{-1}\approx 0.632$$

同样，现有库存量$I=2$，并采用订货一台的行动a_1时，下一周库存量为1这一事实当且仅当本周需求量$D=2$，故有

$$P(1|2,a_1)=P(D=2)=\frac{1}{2!}e^{-1}\approx 0.184$$

此外，现有库存量$I=2$，并采用订货行动$a_2=2$时，下一周库存量为1这种情况显然是不可能存在的，故有

$$P(1|2,a_2)=0$$

经过与上同理的分析与计算，可得该系统的状态转移概率矩阵如下表5-6。

表 5-6

$P(j \mid i, a_0)$ i \ j	取 a_0 时的 P			
	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0.632	0.368	0	0
2	0.264	0.368	0.368	0
3	0.080	0.184	0.368	0.368

$P(j \mid i, a_1)$ i \ j	取 a_1 时的 P			
	0	1	2	3
0	0.632	0.368	0	0
1	0.264	0.368	0.368	0
2	0.080	0.184	0.368	0.368
3	行动a_1不考虑			

$P(j \mid i, a_2)$ i \ j	取 a_2 时的 P			
	0	1	2	3
0	0.264	0.368	0.368	0
1	0.080	0.184	0.368	0.368
2, 3	行动a_2不考虑			

$P(j \mid i, a_3)$ i \ j	取 a_3 时的 P			
	0	1	2	3
0	0.08	0.184	0.368	0.368
1, 2, 3	行动a_3不考虑			

对于该系统的报酬函数 $r(j)$，考虑到 $r(i, a)$ 表示系统在处于状态 i，采取行动 a 时的每周期望费用. 它应是订货费、成本费、缺货损失费三项之和(题设库存费不考虑)，且缺货设备数 l 与系统状态(库存量) i、订货量 k、需求量 D 有关系式

$$l = \max\{D - i - k,\ 0\}$$

故每周期望缺货数为

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{j - i - k,\ 0\} P(D = j)$$

$$= \sum_{j=i+k}^{\infty} (j - i - k) P(D = j)$$

因而可得报酬向量的各分量如下：

$r(0,\ a_0) = 50E(D) = 50$

$r(0,\ a_1) = 10 + 1 \times 25 + 50 \sum_{j=1}^{\infty} (j - 1) P(D = j) = 53.4$

$r(0,\ a_2) = 10 + 2 \times 25 + 50 \sum_{j=2}^{\infty} (j - 2) P(D = j) = 65.2$

$r(0,\ a_3) = 10 + 3 \times 25 + 50 \sum_{j=3}^{\infty} (j - 3) P(D = j) = 86.2$

$r(1,\ a_0) = 50 \sum_{j=1}^{\infty} (j - 1) P(D = j) = 18.4$

$r(1,\ a_1) = 10 + 1 \times 25 + 50 \sum_{j=2}^{\infty} (j - 2) P(D = j) = 40.2$

$r(1,\ a_2) = 10 + 2 \times 25 + 50 \sum_{j=3}^{\infty} (j - 3) P(D = j) = 61.2$

$r(2,\ a_0) = 50 \sum_{j=2}^{\infty} (j - 2) P(D = j) = 5.2$

$r(2,\ a_1) = 10 + 1 \times 25 + 50 \sum_{j=3}^{\infty} (j - 3) P(D = j) = 36.2$

$r(3,\ a_0) = 50 \sum_{j=3}^{\infty} (j - 3) P(D = j) = 1.2$

综合上述计算结果可得表5-7。

表 5-7

i \ $r(i, a)$ \ a	a_0	a_1	a_2	a_3
0	50	53.4	65.2	86.2
1	18.4	40.2	51.2	/
2	5.2	36.2	/	/
3	1.2	/	/	/

（2）利用策略迭代算法求解上述问题

任取初始决策函数

$$f(i)=\begin{cases} a_3, & i=0 \\ a_0, & i=1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

将上述初始决策函数 f 代入（5.19）式可得

$$G(f)=r(i,\ f(i))+\sum_{j\in S}P(j\mid i,\ f(i))v(j)-v(i),\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

取 $v(3)=0$，上式即为

$$\begin{cases} G(f)=r(0,\ a_3)+\sum_{j=0}^{3}P(j\mid 0,a_3)v(j)-v(0) \\ G(f)=r(1,\ a_0)+\sum_{j=0}^{3}P(j\mid 1,a_0)v(j)-v(1) \\ G(f)=r(2,\ a_0)+\sum_{j=0}^{3}P(j\mid 2,a_0)v(j)-v(2) \\ G(f)=r(3,\ a_0)+\sum_{j=0}^{3}P(j\mid 3,a_0)v(j)-v(3) \end{cases}$$

将表5-6的 $P(j\mid i,\ a_k)$ 及表5-7的 $r(i,\ a_k)$ 代入上式，并求解该线性方程组可得

$$\begin{cases} G(f)=31.43 \\ v(0)=85.00 \\ v(1)=64.38 \\ v(2)=31.49 \end{cases} \tag{5.21}$$

将（5.21）式的计算结果代入（5.20）式作极小化运算。当 $i=0$ 时注意到 $A(0)=\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$，其中 $a_i=i$，$i\in S$，因而有

$$r(0, a_0)+\sum_{j=0}^{3} P(j|0, a_0)v(j)-v(0)$$

$$=50+1\times85+0\times64.38+0\times31.49-85=50$$

$$r(0, a_1)+\sum_{j=0}^{3} P(j|0, a_1)v(j)-v(1)$$

$$=53.4+0.632\times85+0.368\times64.38+0\times31.49-64.38$$

$$=45.81$$

$$r(0, a_2)+\sum_{j=0}^{3} P(j|0, a_2)v(j)-v(2)$$

$$=65.2+0.264\times85+0.368\times64.38+0.368\times31.49-31.49$$

$$=37.92$$

$$r(0, a_3)+\sum_{j=0}^{3} P(j|0, a_3)v(j)-v(3)$$

$$=86.2+0.08\times85+0.184\times64.38+0.368\times31.49=31.43$$

考虑到

$$\min_{a\in A(0)}\left\{r(0, a)+\sum_{j=0}^{3} P(j|0, a)-v(0)\right\}$$

$$=\min\{50, 45.81, 37.92, 31.43\}=31.43$$

故对应的更好的行动应取 $g(0)=a_3$。

类似地分别取 $i=1, 2, 3$，并注意到 $A(1)=\{a_0, a_1,$

$a_2\}$、$A(2)=\{a_0, a_1\}$，$A(3)=\{a_0\}$，将表5-6的$P(j|i,a_k)$及表5-7的$r(i, a_k)$代入（5.20）式作极小化运算，依次可求得$g(1)=a_2$，$g(2)=g(3)=a_0$，因而，新的决策函数为

$$g(i)=\begin{cases} a_3, & i=0 \\ a_2, & i=1 \\ a_0, & i=2, \ 3 \end{cases} \tag{5.22}$$

将上述所得的$g(i)$，$i\in S$取代（5.19）式的$f(i)$，$i\in S$，重新求解线性方程组（5.19）式。并将计算结果代入（5.20）式作极小化运算，求得的新的决策函数与$g(i)$，$i\in S$相同。此说明上述决策方案已不能再作改进，故本问题的最优决策函数应取（5.22）式的$g(i)$，$i\in S$。亦即当每周观察时，若库存量为0则订货3台，库存量为1则订货2台，库存量为2或3则不订货。这样的决策方案，必可使决策者每周的平均期望总费用达到最小。

除采用上述策略迭代算法外，例5.7的问题亦可采用§6.2的有限阶段模型与析扣模型来求解，详细计算留作习题供读者自行计算，在此从略。

§5.5 随机库存系统求解的排队论方法

随机库存系统通常和排队系统有着一定的联系。如果我们将货物视作顾客、需求的发生（或订货的到达）看作顾客的到达，而生产（或销售）看作对各顾客的服务，任何时刻尚未交付的需求量（或订货量）看作系统队长，则随机存贮系统就可作为一个排队系统来处理。此时，缺货可以看作系统队长为0、服务员空闲的场合；周期性盘点可看作一个离散时间的排队系统，而连续性盘点又可看作一个连续时间的排队系统，因而这些随机库存系统的求解可以借助于排队论的有关理论和方法来完成。然而考虑

到随机库存系统本身的特征，它又与一般的排队系统有所不同，因此如何应用排队论的理论和方法来解决某些随机库存问题是人们普遍关心的。本节将通过一个应用问题的求解来介绍如何将一个随机库存系统转化为一个排队系统以及求解的基本思路和方法。事实上，在下面遇到的应用问题中决策者所采用的存贮策略为1-1订货策略，这又是前述各类存贮模型中所没有见过的一种新的订货策略形式。

例5.8 考虑某公司贵重物品的库存问题：该公司有一仓库存贮该贵重物品，仓库容量为 s。该贵重物品的需求以Poisson流发生(到达)，平均发生(到达)率为 $\lambda(\lambda>0)$。当一个物品需求发生（到达）时，若仓库中有货，则可从中拨出一件交货，与此同时向公司所属工厂下达任务生产一件贵重物品（即订货一件)。若仓库中无货，即发生缺货现象，此时虽无库存货物可交，但仍需向公司所属工厂下达生产一件贵重物品的任务（此称为1-1定货策略)。今设工厂只能一件一件地生产该贵重物品，生产时间服从负指数分布，平均生产时间为 $\frac{1}{\mu}$，其中 $\mu>0$ $\mu>\lambda$。此外，设单位贵重物品存放单位时间的费用为 c 元(包括存贮费、保险费，损耗费等)，缺少一件贵重物品单位时间的损失为 h 元，试确定最优库存量 s^*，以使单位时间期望总费用达到最小。

下面我们分别就对应排队系统、目标函数作一分析，然后通过公司仓库的存货量与缺货量的讨论来达到求解该应用问题的目的。

(一) 对应排队系统分析

在上述应用问题中，若将贵重物品视作顾客，贵重物品的需求看作顾客的到达，工厂生产该贵重物品看作对顾客的服务，则由于需求的到达是Poisson流，且采用1-1订货策略，故向工厂的订货到达流亦为Poisson流，而工厂对贵重物品的生产时间服

从负指数分布，因而上述随机存贮系统即为一个 $M/M/1/\infty$ 排队系统，其系统结构如图5-4。

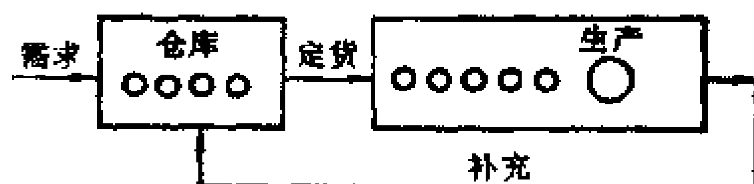


图 5-4

在此排队系统中，若设 $N(t)$ 表示 t 时刻工厂接到的订货数（亦即公司下达的生产任务数），它显然包括正在生产与等待生产的物品数。注意到有 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$，故由 $M/M/1/\infty$ 系统理论（详见§2.2）知，该系统能达到统计平衡状态，且其状态概率的极限存在，并构成概率分布，即有

$$\lim_{t\to\infty} P(N(t)=n)=P(N=n)=p_n,\quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n=1$$

其中 $p_n=P(N=n)$ 表示在统计平衡状态下接到的订货数为 n 的概率，也就是公司尚未交付的需求量为 n 的概率。并有

$$p_n=\rho^n(1-\rho)\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{5.23}$$

（二）目标函数分析

由应用问题知，单位时间的期望总费用为

$$E(s)=cE_{存}+hE_{缺} \tag{5.24}$$

其中 $E_{存}$ 与 $E_{缺}$ 分别表示贵重物品单位时间的平均存贮量与平均缺货量。

若设 r_i 表示在统计平衡状态下，公司有 i 件存货的概率（$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s$）。q_j 表示在统计平衡状态下，公司缺货 j 件的概率（$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$），则显然有

$$E_{缺}=\sum_{n=0}^{\infty} nq_n,\quad E_{存}=\sum_{n=0}^{s} nr_n \tag{5.25}$$

（三）存货与缺货分析

若设仓库存货数为 i，缺货数为 j，公司尚未交付的需求数为 n，则由于仓库容量为 s，故由应用问题知有

$$i + n = s, \quad i > 0$$

但当 $i = 0$ 时，由于库存量为 0，因而公司尚未交货的物品数则可能是 s，也可能是 $s + 1$，或 $s + 2$，或 $s + 3$，…(它表示由于仓库无货，故需求到达后，直接计入订货)，因而有

$$\begin{cases} r_s = p_0 \\ r_{s-1} = p_1 \\ \cdots \\ r_j = p_{s-j} \\ \cdots \\ r_1 = p_{s-1} \\ r_0 = \sum_s^{\infty} p_n \end{cases} \tag{5-26}$$

另一方面，注意到缺货是由于库存量 s 已取完而无货可交所致。因而缺货数 j 与尚未交货数 n 有如下关系

$$j + s = n, \quad j > 0$$

当 $j = 0$ 时，由于未产生缺货现象，因而尚未交货数可能是 0，1，2，…，s 中的某一个数。综合上述知有

$$\begin{cases} q_0 = \sum_{n=0}^{s} p_n \\ q_1 = p_{s+1} \\ q_2 = p_{s+2} \\ \cdots \\ q_j = p_{s+j} \\ \cdots \end{cases} \tag{5.27}$$

（四）系统求解

由（5.24）式、（5.25）式、（5.26）式和（5.27）式知有

$$E(s)=cE_{存}+hE_{缺}=c\sum_{n=0}^{s} nr_n+h\sum_{n=0}^{\infty} nq_n$$

$$=c\sum_{n=0}^{s-1}(s-n)p_n+h\sum_{n=0}^{\infty} np_{n+s}$$

将（5.23）式代入上式，并注意到$\rho<1$有

$$E(s)=c\left[s\sum_{n=0}^{s-1}p_n-\sum_{n=0}^{s-1}np_n\right]+h\sum_{n=s}^{\infty}(n-s)p_n$$

$$=c\left[s(1-\rho^s)-(1-\rho)\sum_{n=0}^{s-1}n\rho^n\right]$$

$$+h\left[(1-\rho)\sum_{n=s}^{\infty}n\rho^n-s\rho^s\right]$$

$$=c\left[s(1-\rho^s)-(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^n\right]$$

$$+(c+h)(1-\rho)\sum_{n=s}^{\infty}n\rho^n-hs\rho^s$$

$$=c\left[s(1-\rho^s)-\frac{\rho}{1-\rho}\right]+(c+h)$$

$$\cdot\left[(s-1)\rho^s+\frac{\rho^s}{1-\rho}\right]-hs\rho^s$$

$$=cs-\frac{c\rho(1-\rho^s)}{1-\rho}+h\frac{\rho^{s+1}}{1-\rho}$$

$$=cs+(c+h)\frac{\rho^{s+1}}{1-\rho}-\frac{c\rho}{1-\rho} \tag{5.28}$$

容易验证$E(s)$为凸函数，这是由于

$$E(s+1)-E(s)=c-(c+h)\rho^{s+1}$$
$$E(s)-E(s-1)=c-(c+h)\rho^{s}$$

从而有

$$E(s+1)-E(s)\geqslant E(s)-E(s-1)$$

或有

$$E(s)\leqslant\frac{E(s+1)+E(s-1)}{2}$$

此即说明$E(s)$为凸函数，故必存在一个全局极小值s^*，使有

$$E(s^*)=\min_{s\in N}E(s) \tag{5.29}$$

于是，逐个计算$E(1)$，$E(2)$，$E(3)$，…，则必可求得极小值s^*，使$E(s^*)$满足（5.29）式，而这样的极小化运算在计算机上是容易实现的。

§5.6 随机库存系统求解的计算机模拟法

对于一个随机库存系统，由本章前述各节得知，我们可以根据该系统的概率特性分别采用微积分法、马尔柯夫决策规划法、排队论方法等解析方法来求解。然而，当此随机系统较为复杂时，上述各种解析方法往往无能为力，此时，运用计算机模拟法来求解就成为唯一可行的方法。

原则上来说，只要随机库存系统的各随机因素的概率特性已知时（它可通过人们的经验判断或经过统计检验得到），我们就可运用计算机模拟的有关理论和相应的模拟算法来作仿真运算，从而获得问题的求解。但需要指出的是，计算机模拟法虽然方法简单、容易求解，但所获得的是问题的近似解，且该近似解的精度依赖于仿真次数。下面，我们将通过二个例题来介绍运用计算机模拟法来求解随机库存系统的基本思路和方法。

（一）报童问题仿真

一报童从报刊发行处订报后零售，每卖一份报可赚钱 a 元，若订报后卖不出去，则可再退回发行处，此时每退一份报要赔钱 b 元。虽然每天卖出报的份数是随机的，但报童可根据以往卖报情况的统计来获得每天卖 n 份报的概率 p_n。试求为使报童每天期望损失费达到最小的订报量 θ^*。

为了比较解析法与计算机模拟法的区别，以下分别就解析法与计算机模拟法进行求解。

1．解析法

设报童每天订报 θ 份，而报纸每天卖出 ξ 份，则由题设知 ξ 有分布列

$$P(\xi=k)=p_k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\quad \sum_{k=0}^{\infty}p_k=1 \tag{5.30}$$

考虑到报童每天的损失有如下两种情形：

（1）供过于求。因退货造成的平均损失为 $c_1=b\cdot E(\eta_1)$，其中 $E(\eta_1)$ 为平均退货数，显然有

$$E(\eta_1)=\sum_{n=0}^{\theta}(\theta-n)p_n$$

（2）供不应求。因缺货造成的损失为 $c_2=a\cdot E(\eta_2)$，其中 $E(\eta_2)$ 为平均缺货数，显然有

$$E(\eta_2)=\sum_{n=\theta+1}^{\infty}(n-\theta)p_n$$

故报童的每天期望损失费为

$$c(\theta)=c_1+c_2=b\sum_{n=0}^{\theta}(\theta-n)p_n+a\sum_{n=\theta+1}^{\infty}(n-\theta)p_n$$

容易得知 $c(\theta)$ 为凸函数，这是由于

$$c(\theta+1)-c(\theta)=(a+b)\sum_{k=0}^{\theta}p_k-a$$

$$c(\theta)-c(\theta-1)=(a+b)\sum_{k=0}^{\theta-1}p_k-a$$

故有

$$c(\theta)\leqslant\frac{c(\theta+1)+c(\theta-1)}{2}$$

此即说明 $c(\theta)$ 为凸函数，因而必存在一个全局的极小值 θ^* 使有

$$c(\theta^*)=\min_{\theta\in N}c(\theta)$$

关于 θ^* 的求解，可通过 $c(k)$，$k=1$，2，…的比较容易得到。

2. 计算机模拟法

对于给定的每一 θ 值，利用离散型随机变量的一般模拟算法（详可参见§4.2）容易得到服从（5.30）式概率分布律的随机数 r，此 r 显然即为报童每天卖出报纸份数的样本值，从而可以计算出报童卖报一天损失的样本值及经 T_0 次仿真试验后的一天损失的平均值。于是依次令 θ 取1，2，3，…，则经过比较，即可获得使报童卖报一天的平均损失达最小的最优订报量 θ^*。根据上述思路不难作出如图5-5的模拟框图。框图中的各变量含义如下：

T_0——对于给定的每一 θ 值应作的一轮试验的预定模拟次数。

G——订报量 θ 之上界估值

θ——报童每天订报量

θ_0——最优订报量

S_1——损失值之累计量

T_1——一轮试验中模拟天数累计值

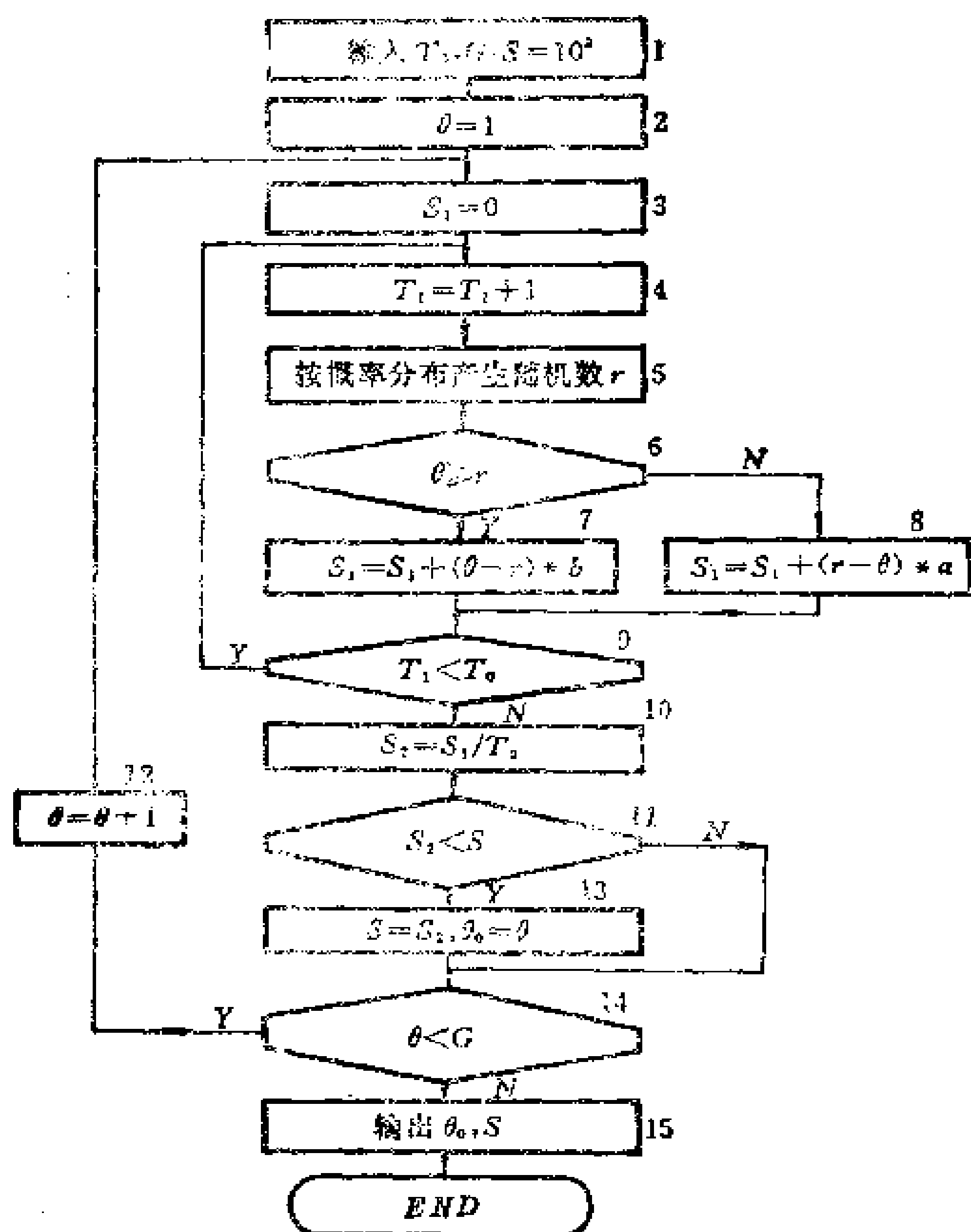


图 5-5

S_2——平均损失值

S——最小平均损失值。

显然，容易完成上述的仿真计算与求解工作，详情在此从略。其中需说明的是S取初值10^8的理由：因为在上述仿真过程中求最小值是通过"打擂台"算法（将不同的订报量θ值所对应的平均损失费S作比较取小值）得到的。为避免最小值丢失起见，通常将S的初始值取尽可能大的数，例如10^8等。

（二）企业生产的库存问题仿真

某企业生产易变质的产品，当天生产的产品必须当天售出，否则就会变质。该产品单位成本为2.5元，单位产品售价为5元。企业为避免存货过多而造成损失，拟从以下两种货存方案中选出一个较优的方案来。

方案甲：按前一天的销售量作为当天的货存量。

方案乙：按前二天的平均销售量作为当天的货存量。

市场对该产品的每天需要量是一个随机变量，但从以往的统计分析得知服从正态分布，均值为135，方差为22.4^2。

以下仅讨论用计算机模拟法来求解上述问题。类似于报童问题仿真，我们只要获得市场对该产品的需要量的样本值D，则容易计算出按照两种不同方案经T天后企业的利润值。于是，经比较大小，即可从中选出一个较优的方案来。至于市场对该产品的需要量的样本值W，只需根据§4.2中连续型随机变量的近似法的抽样公式并取$n=6$，即可得到。其抽样公式如下：

$$W=\mu+\sigma\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} r_i-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right]=\mu+\sqrt{2}\,\sigma\left(\sum_{i=1}^{6} r_i-3\right)$$

其中r_i（$i=1, \cdots, 6$）是伪随机数。

根据以上思路，容易作出上述问题仿真的程序框图5-6。图中各变量的含义如下：

D——每天需求量

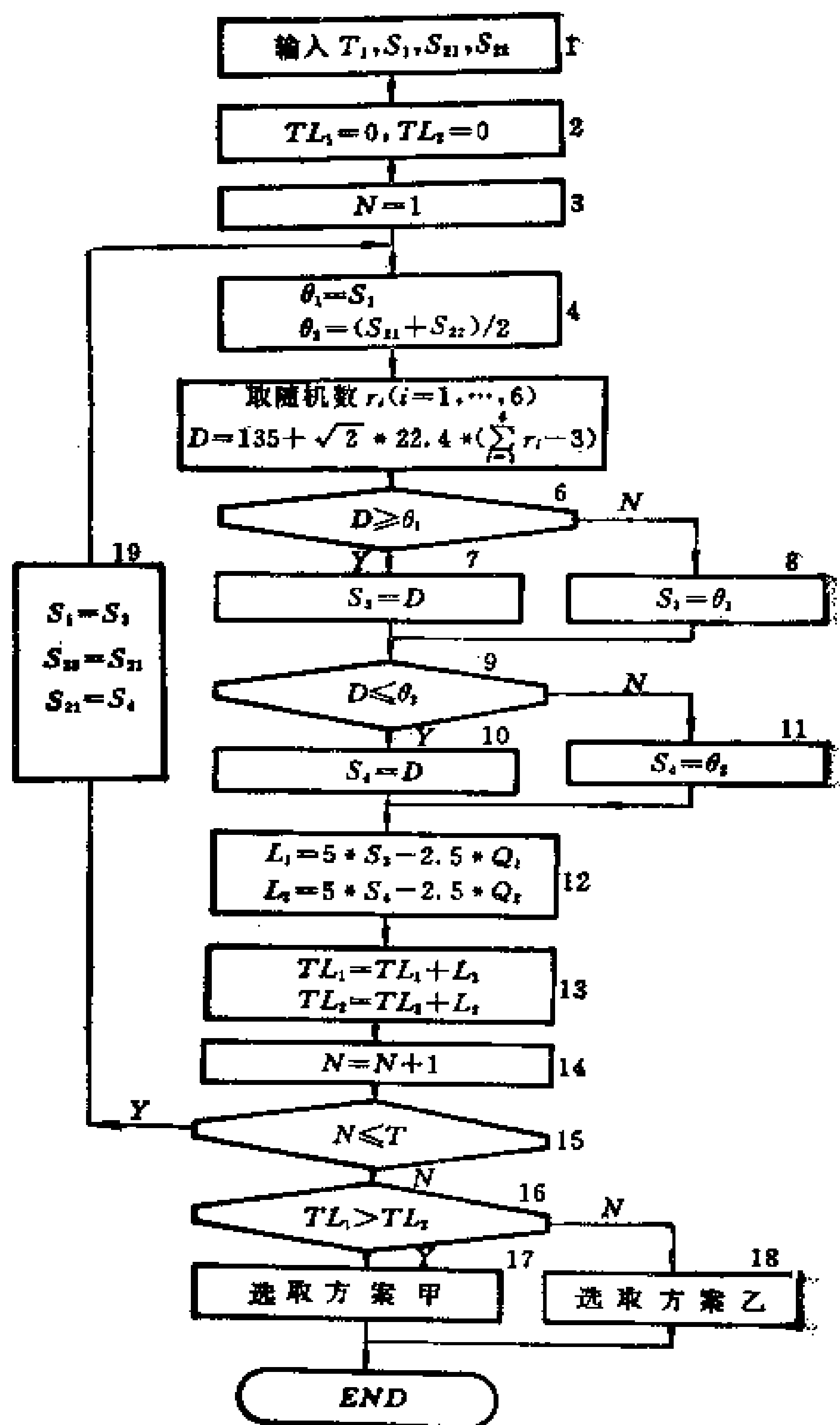
θ_1——方案甲当天货存量

θ_2——方案乙当天货存量

S_1——方案甲前一天之销售量

S_{21}——方案乙前一天的销售量

S_{22}——方案乙前二天的销售量



输入 T_1, S_1, S_{21}, S_{22}
1
$TL_1=0, TL_2=0$
2
$N=1$
3
$\theta_1=S_1$
$\theta_2=(S_{21}+S_{22})/2$
4
取随机数 $r_i(i=1,\cdots,6)$
$D=135+\sqrt{2}*22.4*(\sum_{i=1}^{6} r_i-3)$
6
$D\geqslant\theta_1$
N
Y
7
$S_3=D$
8
$S_3=\theta_1$
19
$S_1=S_3$
$S_{22}=S_{21}$
$S_{21}=S_4$
9
$D\leqslant\theta_2$
N
Y
10
$S_4=D$
11
$S_4=\theta_2$
$L_1=5*S_3-2.5*Q_1$
$L_2=5*S_4-2.5*Q_2$
12
$TL_1=TL_1+L_1$
$TL_2=TL_2+L_2$
13
$N=N+1$
14
Y
$N\leqslant T$
15
N
16
$TL_1>TL_2$
N
Y
17
选取方案甲
18
选取方案乙
END

图 5-6

S_3——方案甲当天实际销售量

S_4——方案乙当天实际销售量

L_1——方案甲当天利润

L_2——方案乙当天利润

TL_1——方案甲累计总利润

TL_2——方案乙累计总利润

T——预定模拟天数

利用BASIC语言容易写出对应于框图5-6的程序，详见表5-8。仿真计算从略。

表 5-8

```
10    INPUT T, S1, S21, S22
15    LPRINT "T=";T, "S1=";S1, "S21=";S21,
      "S22=";S22
20    LET TL1 = 0
30    LET TL2 = 0
40    LET N= 1
50    LET Q1 =S1
60    LET Q2 = (S21+S22)/ 2
70    GOSUB 250
80    IF D<=Q1 THEN S3=D
90    LET S3 =Q1
100   IF D<=Q2 THEN S4 = D
110   LET S4 =Q2
120   LET L1 = 5*S3-2.5*Q1
130   LET L2 = 5*S4-2.5*Q2
140   LET TL1 = TL1+L1
150   LET TL2 = TL2+L2
160   LET N=N+ 1
170   IF T>N THEN 210
180   LET S1 =S3
190   LET S22 =S21
```

（续）

```
200    LET S21 = S4
205    GOTO 50
210    IF TL1>TL2 THEN 230
220    LPRINT" 2 ", TL2
225    GOTO 240
230    LPRINT" 1 ", TL1
240    END
250    LET R1 = 0
260    FOR I = 1 TO 6
270    LET R2 = RND(1)
280    LET R1 = R1 + R2
290    NEXT I
300    LET D = 135 + 1.4142 * 22.4 * (R1 - 3)
310    RETURN
```

习　题　五

1. 某运筹学会为筹备学术年会，必须对参加会议的会员预订床位数作出决策。虽然事先不能肯定需要多少床位，但根据以往的经验，参加会议的会员数大致服从均值为1000人，标准差为200的正态分布。床位租金一般为每人每日35元，但若预订，则只需25元。学会若为会员预订床位太多，到时虽可以退掉，但每个床位需付 8 元，另一方面若订得太少，则将使一些会员支付较高的房租，甚至不得不住到别的旅馆中去，估计每一位不能住到预订房间的代表在35元外平均还将损失 7 元。若从全体会员的集体利益来考虑（将每一会员的损失均视作学会的损失），试问会议筹备时需预订多少床位？

2. 某食品店出售生日蛋糕，每盒成本 5 元，售价 7 元。若到期卖不完，则削价为每盒 4 元销售完毕。已知蛋糕销售量 r 服从 $\lambda = 8$ 的 Poisson 分布，问应订购多少盒蛋糕为宜？

3. 在§5.2单周期随机库存模型中，设初始库存量为 I，订购费为 g，其他假设均不变。为求最优订购量，试推导该模型的求解算法步骤，并说

期原理。

4. 某水库所贮存的水用于电站发电，根据过去积累的数据统计结果如下：每1千立方米水的成本费为0.3元，每1千立方米水供电站发电可获利3元，每缺1千立方米水影响电站发电的损失费为1元，电站对水库的需求量X（千立方米）服从正态分布，均值$\mu = 3\times10^6\text{km}^3$，标准差$\sigma = 1\times10^6\text{km}^3$。试问该水库的贮存水量$\theta$为多少时，水库的期望收益为最大？

5. 某企业对于某种材料的月需求量为随机变量，具有如下概率分布

需求量 j（吨）	50	60	70	80	90	100	110	120
$P(\mu=j)$	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.10	0.10	0.05

每次订货费为500元，每月每吨保管费为50元，每月每吨缺货费为1500元，每吨材料的购置费为1000元。该企业欲采用（s，S）策略来控制库存量，求此s与S。

6. 在§5.3模型Ⅰ中，若设每个周期内的需求量X为连续型随机变量，并具有概率密度$f(x)$，其他假设均不变，试推导欲求最优订购策略（s，S）的算法步骤，并说明理由。

7. 在习题6中，取$k=500$，$c=1000$，$h=50$，$\pi=1500$，$f(x)$服从（50，120）上的均匀分布律，试确定最优订购策略（s，S）。

8. 在§5.3模型Ⅱ中，在滞后期间若发生缺货，采用缺货供应处理方式，其他假设均不变，试就下列两种情况下给出计算订购策略（s，S）的算法步骤，并说明理由。（1）滞后期内的需求量X为离散型随机变量，概率分布列$\{p_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$已知。（2）滞后期内的需求量$X$为连续型随机变量，概率密度$f(x)$为已知。

9. 在习题8中，若滞后期间需求量X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，写出求解最优订购策略的算法步骤，并说明理由。

10. 某饮料公司与一家啤酒厂签订了长期合同，订购瓶装啤酒。合同规定，每次订购的交货时间为5.2周，不得拖延。一次订购的手续费为100元，另据以往经验，交货期间内的需求量服从正态分布，其均值为1000瓶，标准差为250。今设单位存贮费为0.15元。该公司的啤酒除一部分供应市场外，主要供应大型宾馆，因而缺货损失费较多，为每瓶1.0元。试根据上述

条件确定最优订购策略。

11．在§5.3模型II中，将连续性盘点改为周期性盘点，但仍采用（s，S）订购策略．即每隔一定的时间间隔t，就检查一次库存量，若在检查时发现在此以前的t，间隔内有需求，就提出订购要求，其订购量为最大存贮水平S与检查时库存量之差，而订购量将经过滞后时间L后到达，其他假设均不变。试推导寻求最优检查间隔t，和存贮水平S的算法步骤，并说明理由。

12．某货物的订购费为每次30元，每件每周存贮费为1元，每件缺货费为5元．该货物采用周期性检查，每次检查费10元．在检查时若发现在t内有需求，就采用（s，S）订购策略，而订购的货物均在1周内到达已知在$L=1$周内需求服从正态分布，$\mu=12$件，$\sigma^2=1$．若设计划期内的期望需求量为12件，试求最优检查间隔时间t，和存贮水平S。

13．某厂在计划期T内需用配件的数量X是服从Poisson分布的随机变量，平均每月需求量$\lambda=1$，即有$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0$，1，2，…。该厂采用（$s$，$S$）订购策略，在生产循环周期内之存贮费为每件0.125元，缺货损失费为每件1元，装配费为一次0.3元．订购后的滞后时间为随机变量，均值$\mu=14$天，方差$\sigma^2=1$．试问该厂在两年内应分多少批订货，每次批量及缓冲存贮量各为多少，才能使总费用最少？

14．某公司有二个销售点彼此独立地销售某种货物，每个销售点的平均销售率为μ（$\mu>0$），每件货物的销售时间服从负指数分布。公司的货源是向全国各地订购而来，但由于货物的到达受种种随机因素的影响，无法确定每件货物到达的确切时间，但从总体来看，货物的到达为Poisson流，平均到达率为λ（$\lambda>0$）。今设该公司的库存容量为n．（1）求公司在任何时刻发生缺货的概率。（2）若设单位时间每件货物的存贮费为C元，单位时间每件货物的缺货损失为h元，订购费用不计，试求该公司应付出的单位时间期望总费用．（提示：可用排队论的有关方法来求解）

15．利用计算机模拟法求解习题10。

16．利用计算机模拟法求解习题13。

第六章　随机线性规划与马氏决策规划

本章对随机运筹学的两个重要分支—随机线性规划和马氏决策规划的基本理论与方法作一简要的介绍。

§6.1　随机线性规划

随机规划是本世纪五十年代后期兴起的一门年青学科，它是随着数学规划的应用日趋深入而产生的。在数学规划问题中，通常要求目标函数是确定性函数，约束条件是一个确定的集合。然而，在很多生产实践问题中，由于随机因素的影响，规划的目标函数或约束条件不可避免地带有随机成分（如目标函数或约束条件的系数是随机过程或随机变量等）。此时，确定性的数学规划模型往往不再适用，而必须依靠新的随机性的数学规划模型来解决，于是，随机规划理论的研究就应运而生。

然而，由于随机变量或随机过程的引入，数学规划的理论和计算方法将变得更为复杂。目前随机规划这一学科的理论的许多方面还不完善，所研究的一些计算方法也不成熟。尽管如此，在近几十年来，由于它已在管理科学、运筹学、经济学、最优控制等学科和应用中显示出愈来愈强的生命力，因而已成为运筹学的重要分支之一。

由于基础理论和篇幅的限制，本节对随机线性规划的一些基本理论与方法作简要的介绍，以使有兴趣的读者能在此基础上作深入的探讨。

众所周知，线性规划是一种特殊的数学规划问题。所谓欧氏

空间 R^n 中的数学规划问题，就是在给定的 R^n中的一个子集（即所谓可行集）上给定的实值函数（称为目标函数）的最优化问题。一个数学规划问题称为线性规划，如果其目标函数是 R^n 上的线性泛函，且如果可行集可以表成为有限多个半空间和至多有限个超平面的交集。因此线性规划的可行集可以表示成由有限多个线性不等式和至多有限多个线性等式组成的方程组的解的集合，而这些等式和不等式统称为线性约束，它们具有有限多个变量。通常线性规划可以写成如下标准形式

$$\min\{c^T x \mid Ax \geqslant b,\ \ x \geqslant 0\}\text{或}\min\{c^T x \mid Ax = b,\ \ x \geqslant 0\} \tag{6.1}$$

线性规划目前已为广大的数学工作者和工程技术人员、经济分析人员所熟悉，其广泛的应用是基于如下事实：（1）具有成熟的数学理论和有效的计算方法．（2）由于计算机的飞跃发展提供了足够的计算能力．（3）在许多不同的领域中，线性规划已证明是解决实际问题的一种合适的模式。然而当随机因素进入线性规划模型时，例如线性规划（6.1）中系数 A、b、c 出现随机变量时，问题就变得复杂了．尽管我们直观地想象可以采用特殊的处理方式来解决，例如以规划中随机变量的期望值或较好的估计值来代替随机变量本身，然后求解所得的线性规划问题．然而如下事实说明这样的直观设想是不可行的．

例6.1 设（a，b）是矩形$\left\{\left(1\leqslant a\leqslant 4,\ -\frac{1}{3}\leqslant \beta\leqslant 1\right)\right\}$内均匀分布的随机向量，求解如下 LP 问题：

$$\min(x_1+x_2)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} ax_1+x_2\geqslant 7\\ bx_1+x_2\geqslant 4\\ x_1\geqslant 0,\ \ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 注意到有$E(a)=\frac{5}{2}$，$E(b)=-\frac{2}{3}$，以 $E(a)$，

$E(b)$ 分别代替 a 与 b，得到如下规划 LP1：

$$\min(x_1+x_2)$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}\dfrac{5}{2}x_1+x_2\geqslant 7\\ \dfrac{2}{3}x_1+x_2\geqslant 4\\ x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0\end{cases}$$

利用单纯形法或几何解法容易得知 LP1 有唯一最优解

$$x_1^*=\frac{18}{11},\quad x_2^*=\frac{32}{11}$$

若设 $\theta^*=\left(\frac{18}{11},\ \frac{32}{11}\right)$，$D=\{(x_1,\ x_2)|ax_1+x_2\geqslant 7,\ bx_1+x_2\geqslant 4\}$ 则有

$$P(\theta^*\in D)=P\left(\frac{18}{11}a+\frac{32}{11}\geqslant 7,\ \frac{18}{11}b+\frac{32}{11}\geqslant 4\right)$$

$$=P\left(a\geqslant\frac{5}{2},\ b\geqslant\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}$$

它说明 LP1 的最优解 θ^* 位于 LP 可行域 D 的概率仅为 0.25；因而以 $E(a)$ 与 $E(b)$ 分别代替 a 与 b 来求解 LP 问题是不可取的，所以我们必须采用其它途径来解决此问题。

（一）随机线性规划的研究模式

在具有随机线性规划形式的决策问题中，目前解决问题的方式有两种，第一种方式是决策者可以等待随机变量的实现，然后根据这一实现的全部信息来作出决策，也就是，如果 $(\hat{A},\hat{b},\hat{c})$ 是线性规划（6.1）中系数向量（A，b，c）的一个实现，则可以运用此全部信息来求解线性规划

$$\min\{\hat{c}^T x|\hat{A}x=\hat{b},\quad x\geqslant 0\}\qquad(6.2)$$

在这种情况下，人们主要关心的问题有：（6.2）规划最优值的期望或方差是什么？更一般的问题是（6.2）规划最优值的概率分布是什么？此类问题称为分布问题。第二种方式是人们对于 x 的取

值的决策必须事先，或者至少在没有随机变量的实现信息的情况下就作出。在此种设想的前提下，目前研究的模型很多，有机会约束规划问题、二阶段随机线性规划问题（又称带有补偿的随机线性规划问题）、随机线性规划中的可靠性问题等等。下面我们来分别介绍这三类模型的具体形式。

（1）考虑如下规划

$$\begin{aligned} &\min E_\omega c^T(\omega)x \\ &\quad \text{s.t.}\ P_\omega(A(\omega)x-b(\omega)\geqslant 0)\geqslant \alpha \\ &\qquad\qquad x\in X \end{aligned} \tag{6.3}$$

它表示在约束条件 $x\in X$ 下，求原来的目标函数 c^Tx 期望的最小值，但必须保证所求出的 x 至少应以概率 α 满足约束条件 $Ax\geqslant b$。此类规划称为机会约束问题。

（2）考虑线性规划

$$\min\{c^T(\omega)x \mid A(\omega)x=b(\omega),\quad x\geqslant 0\}$$

若其中 $A(\omega)=A$，$c(\omega)=c$，仅 $b=b(\omega)$ 为随机向量，其分布函数已知，并有有限的均值，由于问题希望决策者事先必须对 x 的取值作出决策，显然决策者不可能找到一个合适的决策变量 x，使得对任一 b 都满足约束条件 $Ax=b$。通常 Ax 和 b 之间有差异，我们用新变量 y 和矩阵 B 来表示这一差异，即

$$Ax+By=b,\quad y\geqslant 0 \tag{6.4}$$

由于 By 是第一决策变量 x 违背约束条件而产生的偏差程度的计量，由此会产生一定的惩罚。设惩罚值与 y 成线性关系，记为 d^Ty。对于 b 的一个确定的样本值，满足（6.4）的 y 值很多，决策者在满足（6.4）的前提下选择使 d^Ty 为最小的 y，于是得到第二阶段问题。

$$\left.\begin{aligned} S(x,\ b)&=\min d^Ty \\ \text{s.t.}\quad Ax+By&=b \\ y&\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

令 $\theta(x)=E[S(x,\ b)]$，则最优决策变量适合的规划问题为

$$\min c^T x + \theta(x)$$
$$\text{s.t. } x \geqslant 0$$

这种问题叫带有补偿的二阶段问题。

（3）人们通常还关心如下规划问题：

$$\max_{x \in X} P_\omega(A(\omega)x \geqslant b(\omega))$$
$$\text{s.t. } P_\omega(c^T(\omega)x \leqslant \nu) \geqslant \alpha$$

它表示在费用 $c^T(\omega)x$ 不应该以概率 α 超过某一预先给定的值 ν 的前提下，来寻求使满足约束条件的可行性概率尽可能高的 x 值，此类问题称为随机线性规划中的可靠性最优化问题。

诸如此类的模型还很多，本节只介绍随机线性规划的分布问题与带有补偿的随机线性规划问题两类。

（二）分布问题

当规划（6.1）中系数 A，b，c 均带有随机因素时，我们可研究如下一般模型。

$$\begin{aligned} &\min c^T(t)x \\ &\text{s.t. } A(t)x \geqslant b(t) \\ &\quad x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

其中

$$c(t)=\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_j(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{10}+c_{11}t_1+\cdots+c_{1r}t_r \\ \vdots \\ c_{j0}+c_{j1}t_1+\cdots+c_{jr}t_r \\ \vdots \\ c_{n0}+c_{n1}t_1+\cdots+c_{nr}t_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{10}+c_1t \\ \vdots \\ c_{j0}+c_jt \\ \vdots \\ c_{n0}+c_nt \end{pmatrix}$$

$$b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_i(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{10}+b_{11}t_1+\cdots+b_{1r}t_r \\ \vdots \\ b_{i0}+b_{i1}t_1+\cdots+b_{ir}t_r \\ \vdots \\ b_{m0}+b_{m1}t_1+\cdots+b_{mr}t_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{10}+b_1t \\ \vdots \\ b_{i0}+b_it \\ \vdots \\ b_{m0}+b_mt \end{pmatrix}$$

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}(t)=a_{ij}(0)+a_{ij}t \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$c_j=(c_{j1},\ c_{j2},\ \cdots,\ c_{jr}) \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$b_i=(b_{i1},\ b_{i2},\ \cdots,\ b_{ir}) \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$
$$a_{ij}=(a_{ij}(1),\ a_{ij}(2),\ \cdots,\ a_{ij}(r))$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$t=(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r)^T$$

并规定 $t=(t_1,\ t_2,\ \cdots,t_r)^T$ 是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\ P)$上的随机向量，具有已知的联合概率分布。T为R^M空间中的一闭多面体（$M=nm+n+m$，$r\leqslant M$），且$P(\omega,\ t(\omega)\in T)=1$。如果把$t(\omega)$作为样本，则$T$为一样本空间，因此可在概率空间$(T,\ B_T,\ P_T)$上讨论上述问题。若记

$$r(t)=\min\{c^T(t)x\,|\,A(t)x\geqslant b(t),\ x\geqslant 0\}, \tag{6.7}$$

当t在T上变化时，显然$r(t)$随t而变化，在一定条件下可以证明$r(t)$为一随机变量[24]。对于任一给定的点$x\geqslant 0$，可能有一些t使得它可行，而另一些t使得它不可行。由于$A(t)$，$b(t)$关于t线性，因此，集合$T(x)=\{t\in T\,|\,A(t)x\geqslant b(t),\ x\geqslant 0\}$，$x(t)=\{x\geqslant 0\,|\,A(t)x\geqslant b(t)\}$皆为凸多面体。

1. 可行性与凸性

考虑到一些t将使规划（6.6）的可行集$x(t)=\Phi$，这种t对于解规划（6.6）是没有意义的，因此，只须讨论$x(t)\neq\Phi$的那种t的集合。若记

$$\tilde{T}=\{t\in T\,|\,x(t)\neq\Phi\}$$
$$\tilde{X}=\{x\geqslant 0\,|\,T(x)\neq\Phi\}$$

定理6.1 在规划（6.6）可行集中，若只有b为随机，则$\tilde{T}$，

$\tilde{X}$ 均为凸集。

证明 设 t_1，$t_2 \in \tilde{T}$，λ，μ 为非负实数，且 $\lambda + \mu = 1$。由于 $x(t_i) \neq \Phi$ 且由题设 A 非随机，知存在 $x_i \geq 0$，使有

$$Ax_i \geq b(t_i), \quad i = 1,$$

注意到 $b(t) = (b_{10} + b_1 t,\ b_{20} + b_2 t,\ \cdots,\ b_{m0} + b_m t)^T$ 关于 t 线性，因此有

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2 \geq \lambda b(t_1) + \mu b(t_2)$$
$$= b(\lambda t_1 + \mu t_2)$$

这说明有 $\lambda t_1 + \mu t_2 \in \tilde{T}$，即 $\tilde{T}$ 是凸集，同理可证 $\tilde{X}$ 亦为凸集。

□

当 A 为随机时，以下二例说明，$\tilde{T}$，$\tilde{X}$ 不一定是凸集。

设规划的约束为

$$(t - 3)x_1 + (1 - t)x_2 \geq 1, \quad -\infty < t < \infty$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

容易得知有 $\tilde{T} = (-\infty,\ 1) \cup (3,\ +\infty)$，显然 $\tilde{T}$ 非凸集。

设规划的约束为

$$(-1 + 2t)(x_1 - 2x_2) \geq 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

容易得知有

$$\tilde{X} = \{(x_1,\ x_2) \geq 0 \mid x_1 - 2x_2 \geq 1\} \cup \{(x_1,\ x_2) \geq 0 \mid x_1 - 2x_2 \leq -1\}$$

显然 $\tilde{X}$ 非凸集。

集合 $T(x)$，$x(t)$，$\tilde{T}$，$\tilde{X}$ 均与目标函数无关，因此无论规划（6.6）中的系数 c 是否随机，定理6.1始终成立。以下我们将讨论与目标函数有关的一些集合的凸性，记

$$x^*(t) = \{x^* \geq 0 \mid x^* \text{是规划（6.6）的最优解}\}$$
$$T^* = \{t \in T \mid x^*(t) \neq \Phi\}$$

T^* 对讨论最优值 $r(t)$ 的分布函数有重要意义。因为当讨论有限的 $r(t)$ 时，仅须在 T^* 上而不必在 T 上讨论，这样就排

除了使规划（6.6）不存在有限最优值的那些 t.

由线性规划理论易知，$x^{\circ}(t)$ 为凸集，关于 T° 的凸性有下述定理。

定理6.2 在规划（6.6）中，若 A 是非随机的，则 T° 是凸集。

证明 当 A 非随机时，规划（6.6）的系数 $b(t)$ 与 $c(t)$ 有三种情况可能发生：（1）仅有 $c(t)$ 为随机；（2）仅有 $b(t)$ 为随机；（3）$b(t)$ 与 $c(t)$ 均为随机。以下仅证第一种情况，其它二种情况读者可自行证明。

当 $c(t)$ 为随机，$b(t)$ 为非随机 b 时，任取 t_1，$t_2 \in T^{\circ}$，由 T° 定义知，存在 $x \geqslant 0$ 使以下规划

$$\begin{aligned} &\min c(t_i)^T x \\ &\text{s.t.}\quad Ax \geqslant b \qquad i=1,\ 2 \\ &\qquad\qquad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

均有最优解，不妨设为 $x_i(i=1,\ 2)$。注意到可行集 $\{x \geqslant 0\ Ax \geqslant b\}$ 与 t 无关，因此对一切可行点 x 有 $c(t_i)^T x_i \leqslant c(t_i)^T x$，$(i=1,\ 2)$。考虑非负实数 λ，μ，并有 $\lambda+\mu=1$，作线性组合并考虑到 $c(t)$ 关于 t 为线性的特性，容易得到

$$\lambda c(t_1)^T x_1 + \mu c(t_2)^T x_2 \leqslant c(\lambda t_1 + \mu t_2)^T x$$

此说明如下规划

$$\begin{aligned} &\min c(\lambda t_1 + \mu t_2)^T x \\ &\text{s.t.}\quad Ax \geqslant b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

有最优解，故 $\lambda t_1 + \mu t_2 \in T^{\circ}$，或 T° 为凸集。 □

当 A 为随机时，下述例题说明 T° 不一定为凸集。

例6.2 设随机线性规划为

$$\begin{aligned} &\min(x_1+x_2) \\ &\text{s.t.}\quad (t-3)x_1+(1-t)x_2 \geqslant 1 \qquad -\infty < t < +\infty \\ &\qquad\qquad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

注意到当 $t=0$ 时规划（6.8）成为下述规划

$$\begin{aligned}&\min(x_1+x_2)\\&\text{s.t.}\quad -3x_1+x_2\geqslant 1\\&\qquad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

易知有最优解（0，1）；当 $t=4$ 时规划（6.8）成为下述规划

$$\begin{aligned}&\min(x_1+x_2)\\&\text{s.t.}\quad x_1-3x_2\geqslant 1\\&\qquad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

易知有最优解（1，0），故知有 $0\in T^*$ 及 $4\in T^*$。然而当 $t\in$〔0，3〕时，规划（6-8）的 $x(t)=\Phi$，因而〔1，3〕$\not\subset T^*$。

综合上述三种情况即可得出结论：T^* 非凸集。

2. 决策区域

不失一般性，假设在规划（6.6）中约束条件为等式约束，即有

$$\begin{aligned}&\min c(t)^T x\\&\text{s.t.}\quad A(t)x=b(t)\\&\qquad x\geqslant 0\end{aligned}\tag{6.9}$$

其中 A 为 $m\times n$ 阶矩阵（$n>m$），因而 A 有 C_n^m 个 m 阶子方阵，记为 $B_l(l=1,2,\cdots,C_n^m\triangleq M)$。

定义6.1 若 B_l^{-1} 存在，称 B_l 为一个基，若 $B_l^{-1}b>0$，称 B_l 为可行基，$\tilde{T}(B_l)=\{t\in T|B_l^{-1}b\geqslant 0\}$ 称为由 B_l 确定的可行区域，$T_l=\{t\in T|B_l$ 为规划（6.9）的最优可行基$\}$ 称为由 B_l 确定的决策区域。

定理6.3 在规划（6.9）中若仅有 $b(t)$，$c(t)$ 为随机，则 $T_l(l=1,2,\cdots,M)$ 为凸集。

证明 若设 $B_l=(A_{l_1},A_{l_2},\cdots,A_{l_m})$，$A_{l_k}$ 为 A 中之某一列向量，D 是 A 中划去列向量 $A_{l_1},\cdots,A_{l_m}$ 后所剩的矩阵。$c_{B_l}(t)^T=(c_{l_1}(t),c_{l_2}(t),\cdots,c_{l_m}(t))$ 是 $c(t)$ 对应于 B_l 的

子向量，$c_D(t)^T$为$c(t)^T$中划去$c_{l1}(t)$，…，$c_{lm}(t)$ 剩下的子向量，则由线性规划基本理论知 B_l 是最优可行基的等价条件是 $B_l^{-1}b(t)\geqslant 0$，且$c_D(t)-c_{B_l}(t)B_l^{-1}D\geqslant 0$，于是有 $T_l=\{t\in T|B_l^{-1}b(t)\geqslant 0, c_D(t)-c_{B_l}(t)B_l^{-1}D\geqslant 0\}$。注意到题设仅有 $b(t)$，$c(t)$为随机，且 $B_l^{-1}b(t)$，$c_D(t)-c_{B_l}(t)B_l^{-1}D$ 关于 t 为线性，故 T_l 为凸集。 □

如果 A 为随机，则上述结论不一定成立。

例6.3 设随机线性规划为

$$
\begin{aligned}
&\min(2x_1+x_2)\\
&\text{s.t.}\quad (-3+t)x_1+(1-t)x_2-x_3=1\\
&\qquad\quad (10-t)x_1+(10+t)x_2-x_4=10\\
&\qquad\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0
\end{aligned}
$$

容易验证有 $T_l=\left\{t\geqslant\frac{40}{11}\right\}\cup\left\{t\leqslant-\frac{10}{3}\right\}$，易知$T_l$非凸集。

3. 最优值的分布函数

从定义 6.1 可以看出，对所有的 $t\in T_l$，由等式约束构成的线性随机规划（6.9）的最优可行基是 $B_l(t)$，从而对所有 $t\in T_l$，它的最优基本可行解 $x^*(t)$ 的基向量 $x_l(t)$满足 $x_l^T(t)=B_l^{-1}(t)b(t)$，因此，对所有 $t\in T$ 有 $r(t)=c_{B_l}(t)B_l^{-1}(t)\times b(t)$。若 T_1，T_2，…，T_M 是 T 的一个分割，则由

$$
\begin{aligned}
P(r(t)\leqslant y)&=\sum_{l=1}^{M}P(r(t)\leqslant y,\ t\in T_l)\\
&=\sum_{l=1}^{M}P(c_{B_l}(t)B_l^{-1}(t)b(t)\\
&\qquad\leqslant y,\ t\in T_l),
\end{aligned}
$$

即可求出 $r(t)$ 的分布函数。除此以外，还可使用下面的定理来计算 $r(t)$ 的分布函数。

定理6.4 设对任一 $t\in T$，随机线性规划（6.9）有最优

解，但没有退化的最优基本可行解．T_1，…，T_q是其所有内部互不相交的决策区域，则

$$P(r(t)\leqslant z)=\sum_{i=1}^{q}\int_{T_i(z)} f(y)\mathrm{d}y$$

其中

$$T_i(z)=\{t\mid c_{B_i}(t)B_i^{-1}(t)b(t)\leqslant z\}\cap T_i$$

$f(y)$ 为 t 的密度函数。

证明略。

例6.4　设随机线性规划为

$$\begin{aligned}&\min(c+dt)^T x\\ &\text{s. t.}\quad Ax=b(t)\\ &\qquad x\geqslant 0\end{aligned}\tag{6.10}$$

其中随机变量 t 的密度函数 $f(y)$ 在$[t_0, t_p]$上为正，在$[t_0, t_p]$外为0，且对所有 $t\in[t_0, t_p]$，随机线性规划（6.10）都存在非退化的解，求 $r(t)$ 的分布函数。

解　由所设仅 b，c 是随机的，因而由定理6.3知 T_i 为凸集、故可设随机线性规划（6.10）的内部互不相交的决策区域为

$[t_{k-1}, t_k]$，$(k=0, 1, \cdots, p)$，$[t_0, t_p]=\bigcup\limits_{k=0}^{p}[t_{k-1}, t_k]$，

则有

$$P(r(t)\leqslant z)=\sum_{k=1}^{p}H_k(z)$$

其中 $H_k(z)=P(t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k,\ r(t)\leqslant z)$。当 $t\in[t_{k-1}, t_k]$时，设 x^k是随机线性规划（6.10）的最优基本可行解，则 $r(t)=c^Tx^k+td^Tx^k$。

（1）若 $d^Tx^k>0$，则当 $t\leqslant(z-c^Tx^k)/d^Tx^k$ 时，$r(t)\leqslant z$，因而有

$$H_k(z)=\begin{cases}0, & (z-c^Tx^k)/d^Tx^k\leqslant t_{k-1}\\ T(t_k)-T(t_{k-1}), & (z-c^Tx^k)/d^Tx^k>t_k\\ -T[(z-c^Tx^k)/d^Tx^k]-T(t_{k-1}), & 其它\end{cases}$$

（2）若 $d^Tx^k<0$，则当 $t\geqslant(z-c^Tx^k)/d^Tx^k$ 时，$r(t)\leqslant z$，因而有

$$H_k(z)=\begin{cases}0, & (z-c^Tx^k)/d^Tx^k\geqslant t_k\\ T(t_k)-T(t_{k-1}), & (z-c^Tx^k)/d^Tx^k\leqslant t_{k-1}\\ T(t_k)-T[(z-c^Tx^k)/d^Tx^k], & 其它\end{cases}$$

（3）若 $d^Tx^k=0$，则 $(c+dT)^Tx^k=c^Tx^k$，故有

$$H_k(z)=\begin{cases}0, & c^Tx^k>z\\ T(t_k)-T(t_{k-1}), & c^Tx^k\leqslant z\end{cases}$$

其中 $T(z)$ 为 t 的分布函数。

（三）二阶段问题

由前所述，所谓带有补偿的二阶段问题是指求解如下规划问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & c^Tx+\theta(x)\\ \text{s.t.}\quad & x\geqslant 0\end{aligned}\tag{6.11}$$

其中 $\theta(x)=E(S(x,b))$，$S(x,b)$ 为规划（6.5）的最优值函数，$b=b(\omega)$ 为随机向量，分布函数 $F_b(t)$ 已知。在带有补偿的二阶段问题中，Ax 与 b 的偏差用 By 来描述，其中 B 为 $m\times 2m$ 阶矩阵，y 为 $2m$ 维向量，B 称为补偿矩阵，通常是随机的，特殊地当 $B(\omega)=B$ 时称为带有完全固定补偿的二阶段问题。本节仅介绍一种最简单的带有完全补偿的二阶段问题，即当 $B=(I_m,\ -I_m)$ 时的二阶段问题，它称为具有简单补偿的二阶段问题。

1. 具有简单补偿的二阶段规划的数学模型

引进 b 与 Ax 的正负偏差向量 $y^+=(y_1^+y_2^+\cdots y_m^+)^T$，$y^-=(y_1^-y_2^-$

$\cdots y_m^-)^T$其中

$$y_i^+ = \begin{cases} b_i - A_i x, & 当\ b_i - A_i x \geqslant 0 \\ 0 & ，其它 \end{cases}$$

$$y_i^- = \begin{cases} A_i x - b_i, & 当\ b_i - A_i x \leqslant 0 \\ 0 & ，其它 \end{cases}$$

A_i 为 A 的第 i 行向量。容易验证正负偏差向量满足如下特性：

$$y_i^+ \geqslant 0 \quad y_i^- \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$y_i^+ - y_i^- = b_i - A_i x \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

若记 $y = (y^+, y^-)^T$，则当 $B = (I_m, -I_m)$ 时，规划（6.5）的约束条件 $Ax + By = b$ 即为 $Ax + y^+ - y^- = b$ 及 $y^+ \geqslant 0$，$y^- \geqslant 0$。

若我们假设规划（6.5）的惩罚值与偏差成正比，并记 $d^T = (f^T, g^T)$，$f^T = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$，$g^T = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$，则规划（6.5）的目标函数有

$$d^T y = f^T y^+ + g^T y^- = \sum_{i=1}^{m} (f_i y_i^+ + g_i y_i^-)$$

其中 f 与 g 分别表示正负偏差向量的权系数（向量），通常要求 $f_i \geqslant 0$，$g_i \geqslant 0$，$f_i + g_i > 0$，（$i = 1, 2, \cdots, m$）。于是带有简单补偿的二阶段规划（6.11）可等价于如下数学规划：

$$\min c^T x + E\left[\min \sum_{i=1}^{m} (f_i y_i^+ + g_i y_i^-)\right]$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + y^+ - y^- = b$$

$$x, \ y^-, \ y^+ \geqslant 0 \tag{6.12}$$

注意到上述（6.12）规划中 b 仍为随机向量，还不能直接求解，但若 $b = (b_1 \cdots b_m)^T$ 中各 b_i 的边际分布函数 $F_{b_i}(t_i)$ 已知的话，则可将上述随机规划转化成一个确定性的数学规划来求解。为此，我们先给出下述引理。

引理6.5 设 $F(y)$ 是随机变量 b 的分布函数，则任给 y 有

$$\int_{-\infty}^{y} b\mathrm{d}F(b)=F(y)y-\int_{-\infty}^{y}F(b)\mathrm{d}b \qquad (6.13)$$

证明 若 b 是连续型的随机变量，则 $F'(b)$ 存在，用分部积分法即知（6.13）成立。所以仅需对离散型的情况讨论。设 b 的分布列为

b	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

记

$$G(y)=\int_{-\infty}^{y}b\mathrm{d}F(b),\ \tilde{G}(y)=F(y)y-\int_{-\infty}^{y}F(b)\mathrm{d}b$$

由 s 积分的定义知

$$G(y)=\sum_{b_i\leqslant y}b_ip_i$$

当 $y=b_i$ 时有

$$\begin{aligned}\tilde{G}(b_i)&=b_i\sum_{m=1}^{i}p_m-\int_{-\infty}^{b_i}F(b)\mathrm{d}b\\&=b_i\sum_{m=1}^{i}p_m-[p_1(b_2-b_1)+\cdots+(p_1+\cdots+p_{i-1})(b_i-b_{i-1})]\\&=b_i\sum_{m=1}^{i}p_m-\left[b_i\sum_{m=1}^{i-1}p_m-\sum_{m=1}^{i-1}b_mp_m\right]\\&=\sum_{m=1}^{i}p_mb_m \quad i=1,2,\cdots\cdots\end{aligned}$$

当 $b_i\leqslant y<b_{i+1}$ 时，令 $y=b_i+l$，$0\leqslant l<b_{i+1}-b_i$，

$$\begin{aligned}\tilde{G}(y)&=F(b_i)(b_i+l)-\int_{-\infty}^{b}F(b)\mathrm{d}b-F(b_i)l\\&=\tilde{G}(b_i) \quad i=1,2,\cdots\end{aligned}$$

所以 $\forall y\geqslant b_1$，有 $\tilde{G}(y)=G(y)$。

而 $\forall y_1 < b_1$ 时，$\tilde{G}(y) = G(y) = 0$。故 $\forall y$ 有 $\tilde{G}(y) = G(y)$，即(6.13)式对离散的情形也成立。 □

若设 $F_i(b_i)$ 是规划 (6.1) 中随机向量 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ 中 b_i 的分布函数，利用引理6.5结论可将随机规划 (6.11) 简化成一个确定性的数学规划问题，这是由于

$$
\begin{aligned}
E[f_i y_i^+ + g_i y_i^-] &= \int_{-\infty}^{A_i x} g_i(A_i x - b_i) \mathrm{d}F_i(b_i) \\
&\quad + \int_{A_i x}^{\infty} f_i(b_i - A_i x) \mathrm{d}F_i(b_i) \\
&= \int_{-\infty}^{A_i x} (f_i + g_i)(A_i x - b_i) \mathrm{d}F_i(b_i) \\
&\quad + f_i(Eb_i - A_i x) \\
&= (f_i + g_i)(A_i x - b_i) F_i(b_i) \Big|_{-\infty}^{A_i x} \\
&\quad + f_i(Eb_i - A_i x) + \int_{-\infty}^{A_i x} (f_i + g_i) F_i(b_i) \mathrm{d}b_i \\
&= (f_i + g_i) \int_{-\infty}^{A_i x} F_i(b_i) \mathrm{d}b_i + f_i(Eb_i - A_i x)
\end{aligned}
$$

注意到 $f^T Eb$ 是一常数，与求极小值无关，故 (6.11) 等价于：

$$
\min c^T x + \sum_{i=1}^{m} \left\{ (f_i + g_i) \int_{-\infty}^{A_i x} F_i(b_i) \mathrm{d}b_i - f_i A_i x \right\}
$$

$$
\text{s.t.} \quad x \geqslant 0
$$

令 $h_i = A_i x$，则上述二阶段规划模型为：

$$
\min c^T x + \sum_{i=1}^{m} \left\{ -f_i h_i + (f_i + g_i) \int_{-\infty}^{h_i} F_i(b_i) \mathrm{d}b_i \right\}
$$

$$
\text{s.t.} \quad Ax - h = 0, \quad x \geqslant 0 \tag{6.14}
$$

2. 最优解的等价条件

下面我们将证明，在特殊情形下，(6.14)的最优值有限，并给出 (6.14)的最优解点的充分必要条件。在给出这些定理之前，我们先来看一个例子。

例6.5

$$\min x_1 + E\min 2y^+$$
$$\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 = 100$$
$$x_1 + y^+ - y^- = b$$
$$x_1,\ x_2,\ y^+,\ y^- \geqslant 0$$

其中 b 在区间（70，80）上服从均匀分布。试求该规划的最优值与最优解。

解 显然，其第二阶段的规划为

$$\min\quad 2y^+$$
$$\text{s.t.}\quad y^+ - y^- = b - x_1$$
$$y^+,\ y^- \geqslant 0$$

所以

$$S(x,b) = \begin{cases} 2(b - x_1), & b - x_1 > 0 \\ 0, & b - x_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$ES(x,\ b) = \int_{x_1}^{80} 2(b - x_1)\mathrm{d}F(b)$$

$$= \begin{cases} \int_{70}^{80} 2(b - x_1)\mathrm{d}F(b) & 0 \leqslant x_1 \leqslant 70 \\ \int_{x_1}^{80} 2(b - x_1)\mathrm{d}F(b) & 70 < x_1 \leqslant 80 \\ 0 & 80 < x_1 \leqslant 100 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 150 - 2x_1 & 0 \leqslant x_1 \leqslant 70 \\ (80^2 + x_1^2 - 160x_1)/10 & 70 < x_1 \leqslant 80 \\ 0 & 80 < x_1 \leqslant 100 \end{cases}$$

因此

$$\min x_1 + ES(x,\ b)$$
$$\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 = 100$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$

的最优值为 77.5，其最优解为 $x_1^* = 75$，$x_2^* = 25$。

定理6.6 设 b_i 仅在 $[b_i^0,\ b_i^1]$ 内取值$(-\infty < b_i^0 < b_i^1 < +\infty$，$i = 1, \cdots, m)$，则

$$\min \sum_{i=1}^{m} \left\{ -f_i y_i + (f_i + g_i) \int_{-\infty}^{y_i} F_i(b_i) \mathrm{d}b_i \right\}$$

$$\text{s.t.} \qquad y \in R^m \tag{6.15}$$

的最优值有限．此外，若 b 还是连续型的随机向量，则 (6.15) 存在最优解。

证明 记

$$R_i(y_i) = -f_i y_i + (f_i + g_i) \int_{-\infty}^{y_i} F_i(b_i) \mathrm{d}b_i$$

显然有

$$\min_{y \in R^m} \sum_{i=1}^{m} R_i(y_i) = \sum_{i=1}^{m} \min_{y_i} R_i(y_i)$$

当 $y_i \leqslant b_i^0$ 时有 $R_i(y_i) = -f_i y_i$，故有 $\min\limits_{y_i \leqslant b_i^0} R_i(y_i) = -f_i b_i^0$。

当 $y_i \geqslant b_i^1$ 时有

$$R_i(y_i) = (f_i + g_i) \int_{-\infty}^{b_i^1} F_i(b_i) \mathrm{d}b_i + g_i y_i - b_i^1 (f_i + g_i)$$

$$\min_{y_i \geqslant b_i^1} R_i(y_i) = (f_i + g_i) \int_{-\infty}^{b_i^1} F_i(b_i) \mathrm{d}b_i + g_i b_i^1 - b_i^1 (f_i + g_i)$$

注意到题设 b_i 仅在 $[b_i^0, b_i^1]$ 上取值，故当 $b_i < b_i^0$ 时有 $F_i(b_i) = 0$，由此可知 $\min\limits_{b_i^0 \leqslant y_i \leqslant b_i^1} R_i(y_i)$ 亦是有限的。综合上述可知(6.15)的最优值有限。

当 b_i 为连续型随机变量时，由于 $R_i(y_i)$ 在 $[b_i^0, b_i^1]$ 上连续，故必存在 $y^* \in [b_i^0, b_i^1]$，使得 $R_i(y_i^*) = \min\limits_{y_i} R_i(y_i)$，即(6.15)存在最优解。

§6.2 马氏决策规划

决策是一个十分广泛的词，大至宇宙世界，小至个人生活都有不少问题需要人们来进行决策，只不过这些问题有难有易而已。

人们虽然很早以来就接触到需要决策的问题，但对决策的正确认识和重视则是近几十年的事。过去由于需要决策的问题范围小，也比较简单，人们只需凭借个人的经验和智力就能作出较好的决策，因此人们并没有自觉地认识到决策的重要性，更认识不到有必要去探讨决策过程的规律性，使决策过程科学化，以便自觉地指导决策实践，提高决策水平。在人类漫长的历史长河中，虽然也涌现了许多杰出的政治家、军事家、经济家和外交家，他们都曾在不同领域作出过许多被视为典范的卓越决策，至今仍为人们所传颂和借鉴。但所有这些也仅仅为人类的决策活动提供了一些范例和某些特定的原则，还没有形成科学的决策方法论体系。随着科学、生产和社会的发展，人们遇到的问题的范围越来越大，情况越来越复杂，许多新的、过去从未接触过的问题需要人们对它进行研究和决策。由于轻率和不科学的决策所带来的巨大危害，迫使人们不得不摆脱过去那种单凭主观经验判断而作出决策的情况，转而对一些客观的、科学的决策思想和方法进行总结和研究。当前由于竞争环境的改变和科学技术的飞速发展，新产品、新技术不断出现，以及国家对经济的干预，社会对企业的压力，使管理者认识到，如何及时根据政治、经济各方面的变化作出合理的战略决策，是一个企业成败的关键。它比企业内部提高工效，增加产量等问题更为重要。战略决策错了，比如产品没有销路，生产得越多损失也越多，所以管理的重点必须转向决策，尤其是转向战略决策上来，这是实践的需要。管理实践迫切需要一套能指导管理决策的决策理论和方法，因此以美国经济专家 H.A.Simon 为首的管理决策学派就应运而生。Simon 认为“管理就是决策”，“管理的关键在于决策”。这是管理理论发展中的一个大变化，决策科学也就在这种情况下产生并得到发展。

决策科学的发展，也与本世纪五十年代以来科学技术的迅猛发展有关，当时出现的控制论、信息论、系统论等一批横向学科与综合学科为人类的决策活动提供了新的思想和方法论。电子计

算机的出现又为人类的决策活动提供了定量分析的手段。另一方面，心理学、社会心理学在研究人类决策活动的心理因素和社会因素方面也取得了重大成就，从而为人类的决策过程、创新思维、参与决策等课题提供了新的思路。有了这两方面的发展，使得人们对决策活动中的人、物、机等各方面因素的作用，有了比较全面的认识，对复杂系统的决策进行定性、定量分析也有了各种方法和手段，从而使决策科学逐步完善起来。

决策科学由于其研究范围的广泛性，因而所包含的内容十分丰富。有研究确定性多阶段（或连续）最优决策的“动态规划”；研究具有无后效结构的动态随机系统最优序贯决策的“Markov决策规划”，基于主观概率与效用函数有机结合之上的“决策分析”；研究多人具有竞争性决策的“对策论”，研究多指标决策问题的“多目标决策”，研究解决半结构化或无结构化问题的计算机辅助决策工具的决策支持系统等等。本节主要介绍Markov决策规划的基本内容与方法。

Markov决策规划是解决随机性序贯决策问题的重要分支学科。所谓序贯决策是指这样一类多阶段决策问题，在系统的运行过程中，它不是作一次决策就结束，而是在一系列观察时刻点上都要作出决策。且系统状态的转移是事前无法确切知道的随机事件。在每个观察时刻，决策者首先根据观察所得的系统状态，从其所有备选方案中选择一个方案（即作出决策）执行，然后再观察下一时刻系统出现的状态，据此再次作新的决策，如此一步一步地进行下去。如果在序贯决策过程中，系统状态的转移服从已知的概率规律且与系统以前的发展历史无关，则称这类系统为具有无后效性（或Markov性），并称解决此类序贯决策问题的数学模型为Markov决策规划(以下简称马氏决策规划并简记为MDP)。在马氏决策规划中，系统状态的转移规律与选用的方案两者交互作用决定了系统的发展进程，并使决策者获得一定的经济效益。因此此类决策的中心问题是在各时刻如何选择方案，使系统运行

的全过程在某种意义下达到最优运行效果。

MDP 的基本思想渊源于本世纪五十年代。1957 年 Bellman 利用 Markov 决策过程的术语，以著名的“最优性原理”作为出发点进行研究，但未获突破性进展。1960 年 Howard 在其名著《动态规划与马尔柯夫过程》中，放弃了以最优性原理作为研究的出发点，转而对一些特定的目标函数（准则函数）来研究，从而在理论上获得了不少结果。与此同时 MDP 的算法也逐渐得到了解决，这就使 MDP 开始走向实用化。目前利用 MDP 理论可解决最优库存问题、排队系统的最优控制问题、机器的最优更换及维修策略问题等等，并在水库的最优调度、矿山的最优检修问题、最优放矿问题等得到了很好的应用，显示了该学科的巨大生命力。

（一）马氏决策规划的数学描述

一般地说，马氏决策规划可由一个五元体$\{S,(A(i),i\in S),P,r,V\}$来描述。为了使读者能确切理解上述五元体的数学含义，首先介绍一个机器维修问题，然后对策略类及常用目标函数（准则函数）作一介绍。

1. 机器维修问题

例6.6 等周期地（如一天）观察一台运行着的机器。设在每个周期的初始时刻观察它的运行情况，机器可能处于两个状态之一：正常运行（记为 1）；出故障（记为 2）。在任一周期，若正常运行，可收入 10 元。到下一周期初，仍处于正常运行的可能性为 0.7，处于出故障的可能性为 0.3。因为系统状态的转移是随机的，因此当机器处于正常运行状态时选择的方案显然只有一个，即继续生产（记为 a_1），但当机器处于故障状态时，则有两个方案可供选择：快修（记为 a_2）和常规修理（记为 a_3）。在快修时要付费用 5 元，而该时段能修复的可能性为 0.6；在常规修理时需付费用 2 元，且在该时段能修复的可能性为 0.4。问在各

个周期初，根据观察到的状态，应如何选择方案，使在整个考察期内某种期望收益为最大。

解 容易看出，每个阶段状态转移规律与收益都依赖于选用的方案 a，以 $P(j|i, a)$ 表示在时刻 t 观察到系统状态为 i，选用方案为 a，于 $(t+1)$ 时刻转移到状态 j 的概率。$r(i, a)$ 表示在时刻 t 观察到系统状态为 i，选用方案为 a 时所获得的收益。显然 $P(j|i, a)$ 与 $r(i, a)$ 都与 t 时刻以前系统的历史无关。将 $P(j|i, a)$ 和 $r(i, a)$ 的数值列表如下：

表 6-1

状态 i	方案 a	$P(j\|i, a)$ $j=1$	$j=2$	$r(i, a)$
1	a_1	0.7	0.3	10
2	a_2	0.6	0.4	−5
	a_3	0.4	0.6	−2

用 f 表示如下的映射：当观察到系统状态为1时，选择方案 a_1。当观察到系统状态为2时，选择方案 a_2，即 $f(1)=a_1$，$f(2)=a_2$。类似地，若令 g 表示如下映射：$g(1)=a_1$，$g(2)=a_3$，则 f，g 称为方案选择规则（或称决策规则）。

当 $t=0$ 时，根据选择规则从 f，g 中选用一个决策，记为 f_0（相应得出选用的方案）。从状态 i 出发获得收益 $r(i, f_0(i))$。

$t=1$ 时，机器转移到状态 j 的概率为 $P(j|i, f_0(i))$ $(i, j=1, 2)$。同样从 f，g 中选用一个决策，设为 f_1，由于状态转移是随机的，因而获得的收益也是随机的，其期望收益为

$$\sum_{j=1}^{2} P(j|i, f_0(i))\, r(j, f_1(j)).$$

$t=2$ 时，转移到状态 k 的概率为 $P(k|j, f_1(j))$ $(k, j=1, 2)$，再从 f，g 中选用一个决策，记为 f_2。依次下去，

得一决策序列 $(f_0, f_1, f_2, f_3, \cdots)$（相应可得出方案序列），将其记为 π，称为策略．由于收益是从 $t=0$ 时开始计算的，考虑到经济上利率的影响，则在 t 时段的单位收益可折合成初始时刻 $t=0$ 时的值 β^t，其中 $\beta=\dfrac{1}{1+\alpha}$，$\alpha>0$。因此，$t=0$ 时从状态 i 出发，长期的期望折扣总收益为

$$V_\beta(\pi, i)=r(i, f_0(i))+\beta\sum_{j=1}^{2}P(j\mid i, f_0(i))\,r(j, f_1(j))+\beta^2\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}P(j\mid i, f_0(i))P(k\mid j, f_1(j))\,r(k, f_2(k))+\cdots \quad (i=1, 2)$$

$V_\beta(\pi, i)$ 就是衡量本问题策略优劣的准则。当系统的状态转移律已知时，它显然是初始状态 i 和策略 π 的函数，本问题就是寻求这样的方案序列 π，使 $V_\beta(\pi, i)$ 获得最大值。

2. MDP 的数学描述

一个离散时间的 MDP 模型是由 $\{S, (A(i), i\in S), P, r, V\}$ 五个部分组成的。

S 为状态空间，本节假设 S 为有限集。

$A(i)$ 为状态 $i\in S$ 的备选方案集，假设 $i\in S$，$A(i)$ 为有限集。

P 为系统状态转移律，$P(j\mid i, a)$ 表示任一时刻 t $(t=0, 1, 2, \cdots)$ 系统处于状态 i，选用方案 $a\in A(i)$ 后，在 $(t+1)$ 时刻转移到状态 j 的概率。它与系统在 t 之前的历史无关，也与时刻 t 无关，且满足

$$P(j\mid i, a)\geqslant 0 \quad (a\in A(i),\ i, j\in S)$$

$$\sum_{j\in S}P(j\mid i, a)=1 \quad (a\in A(i),\ i\in S)$$

令 $\Gamma=\{(i, a)\mid a\in A(i), i\in S\}$，$r$ 是定义在 Γ 上

的单值函数，称为收益函数，$r(i, a)$表示在任一时刻t，系统处于状态i，选用方案a时所获得的收益。

V是定义在$\Pi\times S$上的单值实函数，称为目标，其中Π是全体策略构成的集合，S为状态空间，对任意给定的策略$\pi\in\Pi$，$i\in S$，$V(\pi, i)$表示$t=0$时从状态i出发，用策略π所获得的目标值，它是衡量不同策略优劣的标准。

当给定一组S，$\{A(i), i\in S\}$，P，r，V时，我们就认为给定了一个具体的 MDP 模型。

3. 策略类与目标函数

我们把从状态空间S到备选方案集$A(i)$的映射f叫做方案选择规则（或称决策规则），全体决策规则所成之集记为F。

定义6.2 任一决策规则序列$\pi=(f_0, f_1, f_2, \cdots)$，$f_t\in F$，$t\in(0, 1, 2, \cdots)$称为马氏策略，其中$f_t$是在时刻$t$选择方案的规则。显然，它不依赖于时刻$t$以前系统的历史，只要知道时刻$t$及该时刻系统的状态$i$，按照$\pi$选择的方案$f_t(i)$就唯一决定了。全体马氏策略所成之集记为$\Pi_m^d$，称为马氏策略类。若在马氏策略中，于$t$时刻选择方案的规则（记为$\pi_t$）具有随机性，即在时刻$t$，系统处于$i_t$时选用方案$a$的概率为$\pi_t(a|i_t)$，且

$$\pi_t(a|i_t)\geq 0,\quad \sum_{a\in A(i)}\pi_t(a|i_t)=1,$$

则称这种$\pi=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$为随机马氏策略。全体随机马氏策略所成之集记作$\Pi_m$，称为随机马氏策略类。若在$t$时刻选择方案的规则$\pi_t$不仅是随机的，而且还依赖于$t$以前历史，则称这样的$\pi=(\pi_0, \pi_1, \cdots)$为一般策略，简称策略。全体策略所成之集记作$\Pi$，称为策略空间。容易看出，各策略类之间满足关系$\Pi_m^d\subset\Pi_m\subset\Pi$。

在 MDP 中常用的目标有以下三种：

（1）有限阶段目标$V_N(\pi)$

令Y_t，Δ_t分别表示在时刻t所观察到的状态和决策者所选用的方案。由于状态转移是随机的，因而t时刻所选用的方案也是

随机的，故Y_t，Δ_t均为随机变量。$(Y_0, \Delta_0, Y_1, \Delta_1, \cdots)$为一离散时间参数的随机过程，注意到这种随机过程依赖于所选用的策略π，故用符号$\mathscr{L}(\pi)$表示。

令$R_t(\pi)=r(Y_t, \Delta_t)$，显然$R_t(\pi)$也是随机变量，其中$r$为收益函数。$R_t(\pi)$表示由策略$\pi$决定的马氏决策过程第$t$阶段的收益函数。

对给定的自然数N，选用策略π及$i\in S$，

令

$$V_N(\pi, i)=\sum_{t=0}^{N} E_\pi[R_t(\pi)|Y_0=i]$$

$$=\sum_{t=0}^{N}\sum_{\substack{a\in A(j)\\ j\in S}} P_\pi\{Y_t=j, \Delta_t=a|Y_0=i\}\, r(j, a)$$

则$V_N(\pi, i)$表示采用策略π，在$t=0$时从状态i出发直到时刻N所获得的期望总收益。设$V_N(\pi)$表示一列向量，其第i个分量为$V_N(\pi, i)$，$i\in S$，则$V_N(\pi)$称为N阶段目标。有时为了简便，我们不指明阶段数N，而统称为"有限阶段目标"。以有限阶段目标作为目标的MDP称为有限阶段模型。

（2）折扣目标$V_\beta(\pi)$

令

$$V_\beta(\pi, i)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_\pi[R_t(\pi)|Y_0=i]$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{\substack{a\in A(i)\\ j\in S}} P_\pi\{Y_t=j, \Delta_t=a|Y_0=i\}\, r(j, a) \qquad (i\in S, \pi\in\Pi)$$

$0<\beta<1$称为折扣因子，它是事先给定的。$V_\beta(\pi, i)$表示用策略π，在$t=0$时从状态i出发所获得的长期折扣期望总

收益。

若考虑有限阶段，则上述目标为

$$V_{N,\beta}(\pi,\ i)=\sum_{t=0}^{N}\beta^t\sum_{\substack{a\in A(i)\\ j\in S}}^{N}P_\pi\{Y_t=j,\ \Delta_t$$

$$=a|Y_0=i\}r(j,a)$$

$$(i\in S,\ \pi\in\Pi,\ 0<\beta<1)$$

以 $V_N(\pi)$ 表示一列向量，其第 i 个分量为 $V_\beta(\pi,i)$，则 $V_\beta(\pi)$ 称为以折扣目标作为准则的 MDP，简称为折扣模型。

（3）平均目标 $\bar{V}(\pi)$

对任给的 $\pi\in\Pi$，$i\in S$，令

$$\bar{V}_N(\pi,\ i)=\frac{V_N(\pi,\ i)}{N+1}$$

其中 $V_N(\pi,\ i)$ 为有限阶段目标，$\bar{V}_N(\pi,\ i)$ 表示采用策略 π，在 $t=0$ 时从状态 i 出发，前 $N+1$ 阶段的平均期望收益。

当考虑无限阶段的平均期望收益时，令

$$\bar{V}(\pi,\ i)=\lim_{N\to\infty}\inf\frac{V_N(\pi,\ i)}{N+1}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\inf\frac{1}{N+1}\sum_{t=0}^{N}\sum_{\substack{a\in A(i)\\ j\in S}}P_\pi\{Y_t$$

$$=j,\ \Delta_t=a|Y_0=i\}r(j,\ a)$$

$$(i\in S,\ \pi\in\Pi)$$

$\bar{V}(\pi,\ i)$ 即表示用策略 π，在 $t=0$ 时从状态 i 出发的长期每单位时间平均期望收益。令 $\bar{V}(\pi)$ 为一列向量，其第 i 个分量为 $\bar{V}(\pi,\ i)$，则称 $\bar{V}(\pi)$ 为长期每单位时间平均期望目标，简称平均目标。以平均目标为准则的 MDP 称为平均模型。

与一般的最优化问题一样，MDP 首先要解决"最优"的概念问题。因此在本节中我们首先定义最优策略与最优值函数的概

念，然后讨论在上述最优性定义下，对于各种 MDP 模型，其最优策略是否存在？若不存在？能否在某种减弱的意义下存在？能否在小的策略类中找到最优策略（或近似最优策略）？并给出求解最优策略的有效算法。

（二）有限阶段模型

所谓有限阶段模型，由前所述知，它表示在一个 MDP 模型 $\{S,(A(i),\ i\in S),\ P,\ r,\ V\}$ 中，其目标函数 V 的收益只计算到给定的有限阶段 N。亦即对于给定的自然数 N 选用策略 π 及状态 $i\in S$，决策者在 $t=0$ 时从状态 i 出发直到时刻 N 所获得的总收益由如下形式来计算：

$$
\begin{aligned}
V_N(\pi,\ i) &= \sum_{t=0}^{N} E_\pi[R_t(\pi)|Y_0=i] \\
&= \sum_{t=0}^{N} \sum_{\substack{a\in A(j)\\ j\in S}} P_\pi\{Y_t=j,\ \Delta_t \\
&= a|Y_0=i\}\, r(j,\ a)
\end{aligned}
$$

下面我们将介绍有限阶段模型中最优策略的概念，最优策略的存在性问题及其求解算法。

1. 最优策略及其存在性

定义6.3 在有限阶段模型中，若存在一个策略 $\pi^*\in\Pi$，使得对任何 $\pi\in\Pi$、$i\in S$ 均有

$$V_N(\pi^*,\ i)\geqslant V_N(\pi,\ i)$$

则称 π^* 关于有限阶段准则是最优的，简称为最优策略；$V_N(\pi^*)=(V_N(\pi^*,\ 1),\ V_N(\pi^*,\ 2),\ \cdots,\ V_N(\pi^*,\ l))$ 称为关于有限准则的最优值函数，简称为最优值函数。这里的最优是关于所有初始出发状态 i 同时达到最优，这种最优性概念自然是很强的。其中设 $S=\{1,2,\cdots l\}$。

定理6.7 在有限阶段模型 $\{S,(A(i),\ i\in S),\ P,\ r,$

$V_N)$ 中，设 S 为有限，所有 $A(i)$，$i\in S$ 亦均为有限，则必存在一个马氏策略 $\pi^*=(f_0^*, f_1^*, \cdots, f_N^*)$，$f_i^*\in F$，$i=0, 1, \cdots, N$ 关于有限阶段模型是最优的，即对于任何 $\pi\in\Pi$，$i\in S$，有

$$V_N(\pi^*, i)\geqslant V_N(\pi, i)$$

证明略，详见文献〔12〕。

2. 向后归纳法

在确定性动态规划问题求解中，向后归纳法是寻求最优策略的有效解法。下面的定理指出，它同样是求解有限阶段 Markov 决策规划问题中最优策略与最优值函数的有效解法。

定理6.8 在状态集与所有行动集均为有限的有限阶段模型中，定义函数 $V_*^n(i)$，使其满足如下等式：

$$\begin{cases} V_*^{N+1}(j)=0, \quad j\in S \\ V_*^n(i)=\max\limits_{a\in A(i)}\left[r(i, a)+\sum\limits_{j\in S}P(j|i, a)V_*^{n+1}(j)\right] \end{cases}$$

$$=r(i, f_n^*(i))+\sum_{j\in S}P(j|i, f_n^*(i))V_*^{n+1}(j),$$

$$i\in S \tag{6.16}$$

$$n=N, N-1, N-2, \cdots, 0$$

则由上述算式求出的 $V_*^0=(V_*^0(1), V_*^0(2), \cdots, V_*^0(I))$ 即为有限阶段模型的最优值函数，即对每个 $i\in S$，均有 $V_*^0(i)=\sup\limits_{\pi\in\Pi}V_N(\pi, i)$；与此同时求得的决策序列 $\pi^*=(f_0^*, f_1^*, \cdots, f_N^*)$ 即为最优策略，其中设 $S=\{1, 2, \cdots, I\}$。

证明略，详见文献〔12〕。

由于所有的 $A(i)$，$i\in S$ 均为有限，而 $S=\{1, 2, \cdots, I\}$ 为有限，故由（6.16）式求得的 $f_n^*(i)$ 一定存在，且达到最大的行动可能多于一个（此时可任取一个作 $f_n^*(i)$）。定理 6.8 不仅解决了有限阶段模型求解最优策略的方法问题，而且给出了更

为丰富的信息。事实上，(6.16) 式表明，对任何n，$V_*^n(i)$表示在阶段n，从状态i出发，在余下的$N+1-n$阶段的最优期望总报酬；$(f_n^*, f_{n+1}^*, \cdots, f_N^*)$也构成从$n$到$N$阶段的最优策略，这也体现了 Bellman的“最优化原理”。

例6.7 试求例6.6中当$N=3$时的最优策略与最优值函数。

解 由于机器只有两个状态，即$S=\{0, 1\}$，故最优值函数的形式为$V_*^0=(V_*^0(1), V_*^0(2))$，其中$V_*^0(1)$与$V_*^0(2)$可通过 (6.16) 式分别求解得到。注意到题设取$N=3$，因而根据向后归纳法的求解顺序应为$V_*^4(i)\to V_*^3(i)\to V_*^2(i)\to V_*^1(i)\to V_*^0(i)$，其中$i$可取1或2。下面分别列出$n=3, 2, 1, 0$时按照 (6.16) 式计算的有关结果。

(1) $n=3$

$$V_*^4(1)=V_*^4(2)=0$$

$$V_*^3(1)=\max_{a\in A(1)}\left\{r(1, a)+\sum_{j\in S}P(j|1, a)V_*^4(j)\right\}$$

$$=r(1, a_1)=10$$

$$f_3^*(1)=a_1$$

$$V_*^3(2)=\max_{a\in A(2)}\left\{r(2, a)+\sum_{j\in S}P(j|2, a)V_*^4(j)\right\}$$

$$=\max\{r(2, a_2), r(2, a_3)\}$$

$$=\max\{-5, -2\}=-2$$

$$f_3^*(2)=a_3$$

(2) $n=2$

$$V_*^2(1)=\max_{a\in A(1)}\left\{r(1, a)+\sum_{j\in S}P(j|1, a)V_*^3(j)\right\}$$

$$=r(1, a_1)+0.7\times 10+0.3\times(-2)=16.4$$

$$f_2^*(1)=a_1$$

$$V_*^2(2)=\max_{a\in A(2)}\left\{r(2,\ a)+\sum_{j\in S}P(j\mid 2,a)V_*^3(j)\right\}$$

$$=\max\{r(2,a_2)+0.6\times10+0.4\times(-2),\ r(2,a_3)+0.4\times10+0.6\times(-2)\}=\max\{0.2,\ 0.8\}=0.8$$

$$f_2^*(2)=a_3$$

（3） $n=1$

$$V_*^1(1)=\max_{a\in A(1)}\left\{r(1,\ a)+\sum_{j\in S}P(j\mid 1,a)V_*^2(j)\right\}$$

$$=10+0.7\times16.4+0.3\times0.8=21.72$$

$$f_1^*(1)=a_1$$

$$V_*^1(2)=\max_{a\in A(2)}\left\{r(2,\ a)+\sum_{j\in S}P(j\mid 2,\ a)V_*^2(j)\right\}$$

$$=\max\{r(2,a_2)+0.6\times16.4+0.4\times0.8,\ r(2,\ a_3)+0.4\times16.4+0.6\times0.8\}$$

$$=\max\{5.16,\ 5.04\}=5.16$$

$$f_1^*(2)=a_2$$

（4） $n=0$

$$V_*^0(1)=\max_{a\in A(1)}\left\{r(1,\ a)+\sum_{j\in S}P(j\mid 1,\ a)V_*^1(j)\right\}$$

$$=10+0.7\times21.72+0.3\times5.16=26.752$$

$$f_0^*(1)=a_1$$

$$V_*^0(2)=\max_{a\in A(2)}\left\{r(2,\ a)+\sum_{j\in S}P(j\mid 2,\ a)V_*^1(j)\right\}$$

$$=\max\{-5+0.6\times21.72+0.4\times5.16,\ -2+0.4\times21.72+0.6\times5.16\}=\max\{10.096,\ 9.784\}=10.096$$

$$f_0^*(2)=a_2$$

由定理6.8得知最优值函数为

$V_0^* = (V_0^*(1), V_0^*(2)) = (26.752, 10.096) = (V_3(\pi^*, 1), V_3(\pi^*, 2))$相应的最优策略为

$$\pi^* = (f_0^*, f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (f, f, g, g)$$

其中

$$f = f(i) = \begin{cases} a_1, & i = 1 \\ a_2, & i = 2, \end{cases} \quad g = g(i) = \begin{cases} a_1, & i = 1 \\ a_3, & i = 2 \end{cases}$$

运用有限阶段模型的向后归纳法来求解马氏决策规划问题虽然求解比较简单，但却有一个前提：必须确切知道该序贯决策问题将在某有限时段内结束。然而在很多实际问题中，人们往往无法确定该系统在什么时候结束。有时，即使知道它在有限时间结束，但由于单位时间长度通常都取得较小，因而阶段数$N+1$仍然很大，从而导致较大的计算量，因而我们还需考虑别的模型来加以补充，以便取长补短。

（三） 折扣模型

所谓折扣模型，由前所述知，它表示在一个 MDP 模 型 中，其目标函数采用如下形式：

$$\begin{aligned} V_\beta(\pi, i) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_\pi\{R_t(\pi) | Y_0 = i\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{\substack{a \in A(j) \\ j \in S}} P_\pi\{Y_t = j, \Delta_t = a | Y_0 \\ &= i\} r(j, a) \end{aligned}$$

其中β（$\beta \in (0, 1)$）称为折扣因子，通常认为是事先给定的。

下面我们将介绍折扣模型中最优策略与平稳策略的概念，最优策略的基本理论及求解算法。

1. 最优策略及其存在性

定义6.4 在折扣模型中，设$\pi^* \in \Pi$为一给定策略，若对任

给的 $\pi\in\Pi$，$i\in S$，均有

$$V_\beta(\pi^*,\ i)\geqslant V_\beta(\pi,\ i)$$

则称 π^* 关于折扣模型是 β 折扣最优的，简称为 β 最优的，或称 π^* 为 β 最优策略。

定理6.9 在折扣模型中，当状态集 S 及所有 $A(i)$，$i\in S$ 均为有限时，必存在一个马氏策略 $\tilde{\pi}$，使得对任给的 $i\in S$ 及任意的 $\pi\in\Pi$，均有

$$V_\beta(\pi^*,\ i)\geqslant V_\beta(\pi,\ i)$$

证明略，详可见文献〔12〕。

该定理说明，在全体策略类 Π 上寻求最优策略等价于在小得多的马氏策略类 Π_m^d 上寻求最优策略，这就使寻求最优策略的搜索范围大大缩小从而节省了大量的工作量。

考虑到 $V_\beta(\pi,\ i)$ 的分量形式书写繁琐，故引入矩阵符号，以简化后述运算形式。

设 $\pi=(f_0,\ f_1,\ \cdots,f_k,\cdots)\in\Pi_m^d$，其中 f_k 表示马氏决策过程第 k 步时决策者所采取的行动规则，$k\in N=\{0,1,2,\cdots\}$，则该决策过程从 $t=k$ 到 $t=k+1$ 的一步转移概率显然是f_k的函数，可写成$P(j\,|\,i,f_k(i))$，$i,\ j\in S=\{1,2,\cdots,l\}$。并显然有

$$P(j\,|\,i,\ f_k(i))\geqslant 0\qquad i,\ j\in S,\ k\in N$$

$$\sum_{j\in S}P(j\,|\,i,\ f_k(i))=1\qquad i\in S$$

并记

$$P(f_k)=(P(j\,|\,i,\ f_k(i)))_{l\times l}$$

同理，$t=k$ 时的收益也是 f_k 的函数，可写成 $r(i,\ f_k(i))$，$i\in S$，并记

$$r(f_k)=(r(1,\ f_k(1)),\ r(2,\ f_k(2)),\ \cdots,\ r(l,\ f_k(l)))^T$$

再引入矩阵符号 $P^n(\pi)$，并定义

$$P^0(\pi)=I$$

$$P^n(\pi)=P(f_0)P(f_1)\cdots P(f_{n-1}) \qquad (6.17)$$

则 $P^n(\pi)$ 表示决策者采用马氏策略 $\pi=(f_0,\ f_1,\ \cdots,\ f_k,\ \cdots)$ 后的系统 n 步转移概率矩阵。

注意到当 $\pi=(f_0,\ f_1,\ \cdots,\ f_k,\ \cdots)\in\Pi_m^d$ 时，对任何时刻 $t\in N_0$ 及 t 时刻系统所处的状态 i，决策者按照策略 π 所采取的行动规则应唯一确定，因此折扣目标可写成

$$V_\beta(\pi,\ i)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{j\in S}P_\pi\{Y_t=j\,|\,Y_0=i\}\,r(j,f_t(j))$$

其中 $P_\pi\{Y_t=j\,|\,Y_0=i\}$ 即表示决策者采用马氏策略 $\pi=(f_0,f_1,\cdots,\ f_k,\ \cdots)$ 使系统在 $t=0$ 时从状态 i 出发，于时刻 t 转移到 j 的 t 步转移概率。于是，用矩阵与向量的符号来书写，折扣目标又可写成

$$V_\beta(\pi)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^tP^t(\pi)\,r(f_t)$$

2. 平稳策略及其性质

定义6.5 设 $\pi=(f_0,\ f_1,\ \cdots)\in\Pi_m^d$ 若对每个 $t\in N$ 均有 $f_t\equiv f$，则称它为（确定性）平稳策略，记作 f_0^∞，全体平稳策略所成之集合记作 Π_s^d，称它为平稳策略类。显然有 $\Pi_s^d\subset\Pi_m^d\subset\Pi_m\subset\Pi$。

当采用平稳策略时，折扣目标可写成

$$V_\beta(f^\infty)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^tP^t(\pi)\,r(f) \qquad (6.18)$$

下面我们介绍平稳策略的一个重要性质。

定理6.10 在折扣模型中，$\beta\in(0,1)$，$f\in F$，$P(f)=(P(j\,|\,i,\ f(i)))_{i\times j}$，则有

（1）矩阵 $I-\beta P(f)$ 的逆阵存在，且有

$$[I-\beta P(f)]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k P^k(f) \tag{6.19}$$

（2）$V_\beta(f^\infty)=r(f)+\beta P(f)V_\beta(f^\infty)$ (6.20)

其中 $V_\beta(f^\infty)$ 为采用平稳策略时的折扣目标函数。

证明 （1）对于任给的 $n\in N$，恒有

$$(I+\beta P(f)+\beta^2P^2(f)+\cdots+\beta^{n-1}P^{n-1}(f))$$
$$(I-\beta P(f))=I-\beta^nP^n(f) \tag{6.21}$$

考虑到 $\beta\in(0,\ 1)$，$P^n(f)$为非负实数元素构成的 l 阶方阵，故当 $n\to\infty$时有 $\beta^nP^n(f)\to 0$，即当 n 充分大时，(6.21) 式右端行列式异于零。由于两个同阶方阵乘积的行列式等于各方阵行列式的乘积，故知 $I-\beta P(f)$的行列式不为零，因而 $I-\beta P(f)$ 的逆阵存在，或有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\beta^kP^k(f)=(I-\beta^nP^n(f))(I-\beta P(f))^{-1}$$

两边取极限 $n\to\infty$，即可得 (6.19)式。

（2）由前知，当 $\pi=(f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots)$ 时有

$$P^n(\pi)=P(f_0)P(f_1)\cdots P(f_n)$$

今采用平稳策略 $\pi=f^\infty=(f,\ f,\ \cdots,\ f,\ \cdots)$时，显然有 $P^n(\pi)=P^n(f^\infty)=P(f)P(f)\cdots P(f)=[P(f)]^n=P^n(f)$。由 (6.19)，(6.18) 式知折扣目标函数为

$$V_\beta(f^\infty)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^kP^k(\pi)r(f)=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\beta^kP^k(f)\right]r(f)$$
$$=[I-\beta P(f)]^{-1}r(f)$$

上式两端同左乘 $I-\beta P(f)$，经移项即可得 (6.20) 式。 □

对于任给的决策函数 $f\in F$，仿照 (6.20) 式定义一个 l 维列向量到 l 维列向量的变换 T_f：

$$T_fV=r(f)+\beta P(f)V \tag{6.22}$$

我们来研究变换 T_f 的性质。

定理6.11 设 $f\in F$，T_f 为由（6.22）式定义的变换。V 与 V' 为两个 l 维列向量。

（1）若 $V\geqslant V'$，则有 $T_fV\geqslant T_fV'$，即变换 T_f 是单调的。

（2）若 $T_fV\geqslant V$，则 $V_\beta(f^\infty)\geqslant V$．其中 $V_\beta(f^\infty)$ 为采用平稳策略 $\pi=(f, f, f, \cdots)$ 时的折扣目标。同时，若将"$\geqslant$"改为"$>$"，类似结论仍成立。

证明 （1）由（6.22)式有

$$T_fV-T_fV'=r(f)+\beta P(f)V-r(f)-\beta P(f)V'$$
$$=\beta P(f)(V-V')$$

由于 $\beta\in(0,1)$，$P(f)$ 的所有元素非负，且题设 $V\geqslant V'$，因而有

$$T_fV-T_fV'\geqslant 0，此即 T_fV\geqslant T_fV'。$$

（2）若 $T_fV\geqslant V$，利用 T_f 的单调性有

$$T_f^2V=T_f(T_fV)\geqslant T_fV$$

用数学归纳法可以证明，对任何 $n\in N$ 均有

$$f_f^nV\geqslant T_fV$$

即有

$$T_f^nV=r(f)+\beta P(f)r(f)+\cdots+\beta^{n-1}P^{n-1}(f)r$$
$$(f)+\beta^nP^n(f)V\geqslant r(f)+\beta P(f)V=T_fV$$

在上式两端，令 $n\to\infty$，再注意到 $\beta^nP^n(f)V\to 0$ 与(6.18)式，即得

$$V_\beta(f^\infty)\geqslant T_fV,$$

又由题设 $T_fV\geqslant V$，故有 $V_\beta(f^\infty)\geqslant V$。至于将"$\geqslant$"改成"$>$"的证明是类似的。 □

定理6.12 设 π^* 为一马氏策略，即 $\pi^*=(f_0, f_1, f_2, \cdots)\in\Pi_m^d$，若 π^* 是 β 最优，则 π^* 在 $t=0$ 时刻的决策规则(函数) f_0 所构成的平稳策略 f_0^∞ 对同一 β 也是最优的。

证明 令 $\tilde{\pi}=(f_1, f_2, f_3, \cdots)$，即 $\tilde{\pi}$ 是由 π^* 去掉 $t=0$ 时的决策规则 f_0，然后把时间轴往左移动一个时段所得到的相应决

策规则。由于 π^* 是 β 最优，故有

$$V_\beta(\tilde{\pi}) \leqslant V_\beta(\pi^*)$$

利用（6.22）式定义的变换及其单调性，有

$$T_{f_0}V_\beta(\tilde{\pi}) \leqslant T_{f_0}V_\beta(\pi^*) \tag{6.23}$$

由于

$$T_{f_0}V_\beta(\tilde{\pi}) = r(f_0) + \beta P(f_0)V_\beta(\tilde{\pi}) \tag{6.24}$$

由折扣目标定义及 $\tilde{\pi} = (f_1, f_2, f_3, \cdots)$ 有

$$V_\beta(\tilde{\pi}) = r(f_1) + \beta P(f_1)r(f_2) + \beta^2 P(f_1)P(f_2)r(f_3) + \cdots + \beta^n P(f_1)P(f_2)\cdots P(f_n)r(f_{n+1}) + \cdots$$

将上式代入（6.24）式并利用（6.17）式得

$$\begin{aligned}
T_{f_0}V_\beta(\tilde{\pi}) &= r(f_0) + \beta P(f_0)\{r(f_1) + \beta P(f_1)r(f_2) \\
&\quad + \beta^2 P(f_1)P(f_2)r(f_3) + \cdots \\
&\quad + \beta^n P(f_1)P(f_2)\cdots P(f_n)r(f_{n+1}) + \cdots\} \\
&= r(f_0) + \beta P(f_0)r(f_1) + \beta^2 P(f_0)P(f_1)r(f_2) \\
&\quad + \beta^3 P(f_0)P(f_1)P(f_2)r(f_3) \\
&\quad + \cdots + \beta^{n+1}P(f_0)P(f_1)\cdots P(f_n)r(f_{n+1}) + \cdots \\
&= r(f_0) + \beta P^1(\pi^*)r(f_1) \\
&\quad + \beta^2 P^2(\pi^*)r(f_2) + \beta^3 P^3(\pi^*)r(f_3) \\
&\quad + \cdots + \beta^{n+1}P^{n+1}(\pi^*)r(f_{n+1}) + \cdots \\
&= V_\beta(\pi^*)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

将（6.25）代入（6.23）式得

$$V_\beta(\pi^*) \leqslant T_{f_0}V_\beta(\pi^*)$$

利用定理6.11（2）之结论，可得

$$V_\beta(\pi^*) \leqslant V_\beta(f_0^\infty)$$

由于 π^* 是 β 最优的，故必有

$$V_\beta(\pi^*) = V_\beta(f_0^\infty)$$

即 f_0^∞ 对同一 β 也是最优策略。 □

综合定理6.9与定理6.12的结论可得出如下事实：在全体策

略类Π上寻求最优策略，等价于在平稳策略类Π_s^d上寻求最优策略。因为在Π_s^d上所获得的β最优平稳策略，在全体策略类Π上，对同一β来说，它同样是最优的。考虑到当状态集S为有限以及所有$A(i)$，$i\in S$均有限的假设下，Π_s^d仅包含有限个不同的元素，或仅有有限个平稳策略，这就使得寻求最优策略的问题大为简化。

3．求解方法

以下介绍穷举法、策略迭代法和逐次逼近法三种方法。

（1）穷举法

穷举法的基本思想为首先列举出该MDP问题的所有（有限个）平稳策略，然后计算其对应的折扣目标函数值，并通过对这些折扣目标函数值的比较来求解最优值函数与最优策略。然而考虑到在计算最优值函数时要计算矩阵$P(f)$的k次幂($k\to\infty$)，计算量极大。为解决上述困难，可利用(6.20）式，通过求解线性方程来解决。

例 6.8 设有一工厂为市场生产某种产品。每年年初对产品的销售情况进行一次检查，其可能结果有二种：销路好（记为状态1）和销路差（记为状态2）。若销路好一年可获利6千元；若销路差一年要亏本3千元。在每个状态工厂管理人员采用的行动均有二个：不登广告（记作b）或登广告（记作c）。若不登广告，自然无广告费；若登广告，一年要花2千元广告费。对于今年的各种状态及所采取的行动，由于各种随机因素的干扰，转为

表 6-2

状态 i	行动 $a=f(i)$	转移概率 $P(1\mid i,f(i))$	转移概率 $P(2\mid i,f(i))$	报酬（千元） $r(a,i)$
1	b	0.5	0.5	6
	c	0.8	0.2	4
2	b	0.4	0.6	－3
	c	0.7	0.3	－5

下年初的状态概率及相应状态需花费的费用见表6-2。工厂希望考虑长期折扣期望收益，取折扣因子 $\beta=0.9$，求最优策略及最优值函数（计算取两位小数）。

解　由于状态集 $S=\{1,\ 2\}$，行动集有 $A(1)=A(2)=\{b,\ c\}$，故该马氏决策过程的决策规则总共只有四个，它们分别是：

$$f(i)=\begin{cases} b, & i=1 \\ b, & i=2 \end{cases};\quad g(i)=\begin{cases} b, & i=1 \\ c, & i=2 \end{cases};$$

$$h(i)=\begin{cases} c, & i=1 \\ b, & i=2 \end{cases};\quad \varphi(i)=\begin{cases} c, & i=1 \\ c, & i=2 \end{cases}$$

也可写成

$$f=(f(1),\ f(2))=(b,\ b);$$
$$g=(g(1),\ g(2))=(b,\ c);$$
$$h=(h(1),\ h(2))=(c,\ b);$$
$$\varphi=(\varphi(1),\ \varphi(2))=(c,\ c)$$

由定理6.10知各平稳策略对应的折扣目标值应满足如下线性方程组：

$$\begin{pmatrix} V_\beta(f^\infty,\ 1) \\ V_\beta(f^\infty,\ 2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r(1,\ f(1)) \\ r(2,\ f(2)) \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} P(1|1,\ f(1)) & P(2|1,\ f(1)) \\ P(1|2,\ f(2)) & P(2|2,\ f(2)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_\beta(f^\infty,\ 1) \\ V_\beta(f^\infty,\ 2) \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

以下分别计算采用平稳策略 f^∞，g^∞，h^∞，φ^∞ 时所对应的折扣目标函数值

当取平稳策略 $\pi=f^\infty=(f,\ f,\ \cdots)$ 时，由于有

$f=(f(1),\ f(2))=(b,\ b)$，故相应地有

$$r(f)=\begin{pmatrix} r(f(1),\ 1) \\ r(f(2),\ 2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r(b,\ 1) \\ r(b,\ 2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -3\end{pmatrix}$$

$$P(f)=\begin{pmatrix} P(1|1,\ f(1)) & P(2|1,\ f(1)) \\ P(1|2,\ f(2)) & P(2|2,\ f(2))\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P(1|1,\ b) & P(2|1,\ b) \\ P(1|2,\ b) & P(2|2,\ b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

将上述 $r(f)$ 与 $P(f)$ 代入（6.26）式，取 $\beta=0.9$ 可解得

$$V_{0.9}(f^{\infty})=(V_{0.9}(f^{\infty},\ 1),\ V_{0.9}(f^{\infty},\ 2))=(15.49,\ 5.60)$$

类似地取平稳策略 $\pi=g^{\infty}=(g,\ g,\ \cdots)$ 时，由于有 $g=(g(1),\ g(2))=(b,\ c)$，故相应地有

$$r(g)=\begin{pmatrix} 6 \\ -5\end{pmatrix} \qquad P(g)=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$$

将上述 $r(g)$ 与 $P(g)$ 代入（6.26）式并取 $\beta=0.9$ 可解得

$$V_{0.9}(g^{\infty})=(V_{0.9}(g^{\infty},\ 1),\ V_{0.9}(g^{\infty},\ 2))=(18.05,\ 8.73)$$

同理可求得其他二个平稳策略所对应的折扣目标函数值为

$$V_{0.9}(h^{\infty})=(V_{0.9}(h^{\infty},\ 1),\ V_{0.9}(h^{\infty},\ 2))=(20.31,\ 9.38)$$

$$V_{0.9}(\varphi^{\infty})=(V_{0.9}(\varphi^{\infty},\ 1),\ V_{0.9}(\varphi^{\infty},\ 2))=(22.20,\ 12.31)$$

比较上述求得的各折扣目标函数值，由于有 $\max(V_{0.9}(f^{\infty}),\ V_{0.9}(g^{\infty}),\ V_{0.9}(h^{\infty}),\ V_{0.9}(\varphi^{\infty}))=V_{0.9}(\varphi^{\infty})$，故知 $V_{0.9}(\varphi^{\infty})$ 是最优值函数，对应的平稳策略 φ^{∞} 对于 $\beta=0.9$ 为最优策略。显然，这样的计算比按定义计算无穷级数和要容易得多。

在求解上述问题时，人们一定会产生两个疑问：（1）计算平稳策略所对应的折扣目标值时，线性方程组（6.20）之解是否存在且唯一？（2）在比较各折扣目标函数值之大小时，由于每一个折扣目标均是一个列向量，因而上述比较本质上是一个向量的比较问题，那么，是否一定存在一个最优折扣目标向量（该向量的

各分量应该是各比较向量对应分量的最大者)?然而考虑到(6.20)式即为

$$(I-\beta P(f))V_\beta(f^\infty)=r(f)$$

由定理6.10(1)已证明 $I-\beta P(f)$ 的逆矩阵存在，故 $V_\beta(f^\infty)$ 的存在与唯一性是明显的。至于问题(2)，只需注意到定理6.9与定理6.12的结论：该MDP折扣模型的最优策略必可在平稳策略类 Π_s^d 上找到，亦即一定存在一个平稳策略 $f_0^\infty\in\Pi_s^d$，使 f_0^∞ 对任何 $\pi\in\Pi$ 而言是 β 折扣最优的，因而问题（2）的回答也是肯定的。

设 F 所包含的决策函数有 r 个，S 所包含的状态数为 l 个，则运用穷举法求解应用问题时需求解 r 个线性方程组，而其中每个线性方程组则由 l 个未知量与 l 个方程构成。这对于一些小型问题（指 F 所包含的决策函数个数较少时）而言仍不失为一个可行的算法，但当 r 较大时，其计算量将十分繁重，为此应寻求新的算法。

（2）策略迭代法

定理6.13 设一个给定的策略 $\pi^*\in\Pi$，若对所有的 $f\in F$，均有

$$T_fV_\beta(\pi^*)\leqslant V_\beta(\pi^*)$$

则 π^* 是 β 最优策略，其中变换 T_f 由（6.22）式确定。

证明 任取马氏策略 $\pi=(f_0,f_1,f_2,\cdots)\in\Pi_m^d$ 对 $V_\beta(\pi^*)$ 作变换 T_{f_n}，根据题设，我们有

$$T_{f_n}V_\beta(\pi^*)=r(f_n)+\beta P(f_n)V_\beta(\pi^*)\leqslant V_\beta(\pi^*)$$

再用 $T_{f_{n-1}}$ 作用于上式两端并利用变换的单调性有

$$T_{f_{n-1}}T_{f_n}V_\beta(\pi^*)\leqslant T_{f_{n-1}}V_\beta(\pi^*)\leqslant V_\beta(\pi^*)$$

此即为

$$T_{f_{n-1}}[r(f_n)+\beta P(f_n)V_\beta(\pi^*)]=$$
$$r(f_{n-1})+\beta P(f_{n-1})r(f_n)+\beta^2P$$
$$(f_{n-1})P(f_n)V_\beta(\pi^*)\leqslant V_\beta(\pi^*)$$

仿照上述作法，逐次作用可得

$$T_{f_0}T_{f_1}\cdots T_{f_n}(\pi^*)\leqslant T_{f_0}V_\beta(\pi^*)\leqslant V_\beta(\pi^*)$$

此即为

$$\begin{aligned}T_{f_0}[T_{f_1}\cdots T_{f_n}(\pi^*)]&=r(f_0)+\beta P(f_0)r(f_1)+\beta^2P(f_0)P(f_1)r(f_2)+\cdots+\beta^nP(f_0)P(f_1)\cdots P(f_{n-1})r(f_n)+\beta^{n+1}P(f_0)P(f_1)\cdots P(f_n)V_\beta(\pi^*)=r(f_0)+\\&\beta P^1(\pi)r(f_1)+\beta^2P^2(\pi)r(f_2)+\cdots+\beta^nP^n(\pi)r(f_n)\\&+\beta^{n+1}P^{n+1}(\pi)V_\beta(\pi^*)\leqslant V_\beta(\pi^*)\end{aligned}\qquad(6.27)$$

(6.27) 式的第二个等式利用了 (6.17) 式。考虑到 $P^{n+1}(\pi)$ 表示用策略 $\pi=(f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots)$ 时的前 $n+1$ 步转移概率矩阵，其所有元素均为非负，各行之和均为1，$\beta\in(0,\ 1)$，故当 $n\to\infty$时，(6.27) 式中之项

$$\beta^{n+1}P^{n+1}(\pi)V_\beta(\pi^*)\to 0$$

现对 (6.27) 式两端取极限 $n\to\infty$，可得

$$V_\beta(\pi)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^kP^k(\pi)r(f_k)\leqslant V_\beta(\pi^*)$$

此即说明：对于任给的 $\pi\in\Pi_m^d$，恒有 $V_\beta(\pi)\leqslant V_\beta(\pi^*)$，故知$\pi^*$是$\beta$最优策略。 □

利用定理6.11(2)及定理6.13的结论可得如下策略迭代法的算法步骤：

1° 任取一个决策规则 $f\in F$，解线性方程组

$$r(i,\ f(i))+\beta\sum_{j\in S}P(j|i,\ f(i))V(j)=V(i),\quad i\in S\qquad(6.28)$$

其解$V(i)=V_\beta(f^\infty,\ i)$，$i\in S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$。

2° 将步骤1°求得的$V(i)$，$i\in S$代入下式，以寻求一个新的决策函数 $g=(g(1),\ g(2),\ \cdots,\ g(l))\in F$，使其各分量分别满足下述关系式

$$\max_{a\in A(i)}\left\{r(i,\ a)+\beta\sum_{j\in S}P(j\mid i,\ a)V(j)\right.$$

$$=r(i,g(i))+\beta\sum_{j\in S}P(j\mid i,\ g(i))V(j)$$

$$\geqslant r(i,\ f(i))+\beta\sum_{j\in S}P(j\mid i,\ f(i))V(j)$$

$$i\in S \tag{6.29}$$

注意，若同时有几个 a 使（6.29）式左端达最大，则可任取其一作为 $g(i)$，$i\in S$。

3° 若对所有 $i\in S$，（6.29）式均成立等式，则终止计算，并有结论：f^∞ 为 β 最优策略，若至少存在一个 $i\in S$，使(6.29)式成立严格不等式，则以 g 代替 f，并转入步骤 1°，此时有结论 $V_\beta(g^\infty)>V_\beta(f^\infty)$。

下面我们来说明上述算法步骤的原理。对于任何一个决策规则 $f\in F$，由算法步骤 2°所定出的 g，若按矩阵、向量符号书写可写成为

$$r(g)+\beta P(g)V_\beta(f^\infty)\geqslant r(f)+\beta P(f)V_\beta(f^\infty)$$

由（6.20）式及（6.22）式知，上式即为

$$T_gV_\beta(f^\infty)\geqslant V_\beta(f^\infty) \tag{6.30}$$

由定理6.11(2)知，有

$$V_\beta(g^\infty)\geqslant V_\beta(f^\infty)$$

由此可知，经步骤 2°所得的 g^∞ 至少是与 f^∞ 一样好的策略。现分两种情况来讨论：（a）若（6.30）式等号成立，则由（6.29）式，对任给的 $h\in F$，必有

$$r(h)+\beta P(h)V_\beta(f^\infty)\leqslant r(g)+\beta P(g)V_\beta(f^\infty)=V_\beta(f^\infty)$$

此即为

$$T_hV_\beta(f^\infty)\leqslant V_\beta(f^\infty),\quad h\in F$$

由定理6.13知 f^∞ 是 β 最优策略，已达到我们的目的。（b）若(6.30) 式成立严格不等号，即有

$$T_g V_\beta(f^\infty) > V_\beta(f^\infty)$$

则由定理6.11(2) 知有 $V_\beta(g^\infty) > V_\beta(f^\infty)$，即 g^∞ 是比 f^∞ 更好的策略，这使策略得到改进。根据算法步骤，将转入步骤1°，并重复上述计算，直到程序终止。其中需说明的是，由于 F 为有限集，而每次迭代都实现严格改进，因此不会发生循环现象，即经过有限次迭代后，将无法再作改进，则此时的 f^∞，根据前述论证，它必定在全体策略类 Π 上是 β 折扣最优的。

例6.9 利用策略迭代法求解前述例6.8中的 MDP 问题。

解 （a）任取一决策函数 $f=(f(1),\ f(2))=(b,\ b)$（注意：从穷举法知 $V_{0.9}(f^\infty)$ 实际上是最差的折扣目标值）作策略求值运算，即解方程 (6.28)，可得

$$V_1=(V_1(1),\ V_1(2))=(V_{0.9}(f^\infty,\ 1),$$

$$V_{0.9}(f^\infty,\ 2))=(15.49,\ 5.60)$$

（b）将上述计算的 V_1 代入 (6.29)式，并作相应的计算，以求解新的决策函数 $g_1=(g_1(1),\ g_1(2))$。注意到 $A(1)=(b,\ c)$，故 (6.29) 式当 $i=1$ 时取 $\beta=0.9$有

$$\max\left[r(1,\ b)+\beta\sum_{j=1}^{2}P(j\mid 1,\ b)V_1(j),\right.$$

$$\left.r(1,c)+\beta\sum_{j=1}^{2}P(j\mid 1,\ c)V_1(j)\right]$$

$$=\max[15.49,\ 16.16]=16.16$$

故取 $g_1(1)=c$。

由于 $A(2)=(b,\ c)$，故 (6.29) 式当 $i=2$ 时取 $\beta=0.9$ 有

$$\max\left[r(2,\ b)+\beta\sum_{j=1}^{2}P(j\mid 2,\ b)V_1(j),\right.$$

$$r(2, c)+\beta \sum_{j=1}^{2} P(j|2, c)V_1(j)\Bigg]$$

$$=\max[5.60, 7.52]=7.52$$

故取 $g_1(2)=c$。此时显然有$V_{0.9}(g_1^\infty)>V_{0.9}(f^\infty)$

(c) 以 $g_1=(g_1(1), g_1(2))=(c, c)$ 代替 f 转入步骤1°作策略求值运算，即解下述线性方程组：

$$\begin{pmatrix} r(1, c) \\ r(2, c) \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} P(1|1, c) & P(2|1, c) \\ P(1|2, c) & P(2|2, c) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_2(1) \\ V_2(2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} V_2(1) \\ V_2(2) \end{pmatrix}$$

或有

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}+0.9\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_2(1) \\ V_2(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_2(1) \\ V_2(2) \end{pmatrix}$$

求解得

$$V_2=(V_2(1), V_2(2))=(22.20, 12.31)$$

(d) 以上述 V_2 代入 (6.29) 式求解 $g_2=(g_2(1), g_2(2))$。与上同理，由于$A(1)=(b, c)$，故 (6.29) 式 $i=1$ 时有

$$\max\Bigg[r(1, b)+\beta \sum_{j=1}^{2} P(j|1, b)V_2(j),$$

$$r(1, c)+\beta \sum_{j=1}^{2} P(j|1, c)V_2(j)\Bigg]$$

$$=\max[21.54, 22.20]=22.20 \tag{6.31}$$

故取 $g_2(1)=c$。类似地由于$A(2)=(b, c)$，故 (6.29)式当 $i=2$ 时有

$$\max\left[r(2, b)+\beta\sum_{j=1}^{2}P(j|2, b)V_2(j),\right.$$

$$\left. r(2, c)+\beta\sum_{j=1}^{2}P(j|2, c)V_2(j)\right]$$

$$=\max[11.64, 12.31]=12.31 \tag{6.32}$$

故取 $g_2(2)=c$。

注意到 $g_2=g_1=(c, c)$，说明 g_2^∞ 已无法再作改进，满足算法终止计算条件。故 $g_1^\infty=g_2^\infty$ 为 $\beta=0.9$ 之最优平稳策略。相应地由（6.31）与（6.32）式确定的最优值函数为

$$V_{0.9}(g_2^\infty)=(V_{0.9}(g_2^\infty, 1), V_{0.9}(g_2^\infty, 2))=(22.20, 12.31)$$

用策略迭代法求解上述问题时，仅需解两次线性方程组（穷举法则需解四次线性方程组），但增加了一些比较计算。当 F 包含的元素越多时，策略迭代法较之穷举法的优越性就越大。

（3）逐次逼近法

逐次逼近法通常用于求解微分，积分方程，但亦可求解MDP的折扣模型。令

$$M=\max_{\substack{a\in A(i)\\ i\in S}}|r(i, a)|$$

$B=\{V: |V|\leqslant Me/(1-\beta)$，$V$ 为 l 维列向量，e 为每个元素均为1的 l 维列向量$\}$，在 B 上定义一最优变换 T 为

$$TV=\max_{f\in F}T_fV=\max_{f\in F}\{r(f)+\beta P(f)V\}, V\in B$$

注意：这里的max是按各分量分别取max，即对任何 $i\in S$ 有

$$(TV)_i=\max_{f(i)\in A(i)}\left\{r(i, f(i))+\beta\sum_{j\in S}P(j|i,\right.$$

$$\left. f(i))V(j)\right\}$$

对任何两个 V，$V'\in B$，我们引进它们之间的距离 $\rho(V,V')$ 为

$$\rho(V, V') = \|V - V'\| = \max_{i \in S} |V(i) - V'(i)|$$

我们不加证明地引入如下定理，其证明见文献[12]。

定理6.14 对任何V，$V' \in B$，有

（1）T在B上是单调变换，即若$V \geqslant V'$，则有$TV \geqslant TV'$。

（2）T在B上是系数为β的压缩变换，即有$\rho(TV, TV') \leqslant \beta\rho(V, V')$。

（3）T在B上有唯一的不动点V_β^*，即泛函方程$TV = V$有唯一有界解V_β^*，该方程称为最优方程。

（4）令$T^0V \equiv V$，对$n \in N$循环地定义$T^nV = T[T^{n-1}V]$，当$n \to \infty$时有$T^nV \to V_\beta^*$，而且有

$$\rho(T^nV, V_\beta^*) \leqslant \beta^n(1-\beta)^{-1}\rho(TV, V) \tag{6.33}$$

（5）$V_\beta^* = \max\limits_{f \in F} V_\beta(f^\infty) = \sup\limits_{\pi \in \Pi} V_\beta(\pi)$，即$V_\beta^*$是最优值函数。

上述定理告诉我们，对于B上的任何一个I维列向量V，只要将变换T（T是B上系数为β的压缩变换）依次不断地作用于V，则最终必将收敛于最优值函数V_β^*。据此可得到逐次逼近法的如下步骤：

1° 任取一I维向量$V_0 \in B$。

2° 归纳地定义向量序列$\{V_n, n \in N_0\}$

$$V_{n+1} = TV_n = \max_{f \in F}\{r(f) + \beta P(f)V_n\} = r(f_n) + \beta P(f_n)V_n$$

此中的max是按分量分别取的，即有

$$V_{n+1}(i) = \max_{f(i) \in A(i)}\left\{r(i, f(i)) + \beta\sum_{j \in S}P(j|i, f(i))V_n(j)\right\} = r(i, f_n(i)) + \beta\sum_{j \in S}P(j|i, f_n(i))V_n(j)\quad i \in S \tag{6.34}$$

由于$A(i)$均为有限集，故f_n一定存在。

考虑到初始向量V_0的选取将影响到迭代所需要的步数，因此在采用逐次逼近法解决实际问题时，应根据已有的经验，尽量选取较优的向量作V_0。若无先验知识可用，通常可取$V_0\equiv 0$或$V_0(i)=\max\limits_{a\in A(i)} r(i,a)$，$i\in S$。若取后者，则按逐次逼近法经第$n$次迭代得到的$V_n$正好就是从0到$n$周期内获得的最优折扣期望总报酬。另外需要指出的是：一般来说，逐次逼近法并不提供一个得到最优策略的有限步迭代算法，事实上，最优值函数一般仅是逼近，而不一定能达到，但是经n次迭代后的值向量V_n与最优值函数V_β^*之间的误差，则可以通过（6.33）式得到粗略的估计。

例 6.10 利用逐次逼近法求解例6.8的MDP问题，取$\beta=0.9$，并计算$n=57$时的迭代值向量以及作相应的误差估计。

解 根据逐次逼近法之算法步骤，取$V_0\equiv 0$，按（6.34)式作一次迭代运算：

$$V_1(1)=\max_{a\in A(1)}\left\{r(1,a)+0.9\sum_{j=1}^{2}P(j\mid 1,a)V_0(j)\right\}$$

$$=\max\{r(1,b);\ r(1,c)\}=r(1,b)=6$$

达到右边最大的行动是b，故取$f_1(1)=b$，类似地

$$V_1(2)=\max_{a\in A(2)}\left\{r(2,a)+0.9\sum_{j=1}^{2}P(j\mid 2,a)V_0(j)\right\}$$

$$=\max\{r(2,b);\ r(2,c)\}=r(2,b)=-3$$

达到右边最大的行动是b，故取$f_1(2)=b$，然后作第二次迭代运算：

$$V_2(1)=\max_{a\in A(1)}\left\{r(1,a)+0.9\sum_{j=1}^{2}P(j\mid 1,a)V_1(j)\right\}$$

$$=\max\{r(1,b)+0.9[0.5\times 6+0.5\times(-3)],$$

$$r(1,\ c)+0.9[0.8\times 6+0.2\times(-3)]\}$$

$$=\max\{6+0.9\times 1.5,\ 4+0.9\times 4.2\}$$

$$=\max\{7.35,\ 7.78\}=7.78$$

故取 $f_2(1)=c$，类似地

$$V_2(2)=\max_{a\in A(2)}\left\{r(2,\ a)+0.9\sum_{j=1}^{2}P(j|2,a)V_1(j)\right\}$$

$$=\max\left\{r(2,\ b)+0.9\sum_{j=1}^{2}P(j|2b)V_1(j),\right.$$

$$\left.r(2,\ c)+0.9\sum_{j=1}^{2}P(j|2,\ c)V_1(j)\right\}$$

$$=\max\{-3+0.9[0.4\times 6+0.6\times(-3)],-5$$

$$+0.9[0.7\times 6+0.3\times(-3)]\}$$

$$=\max\{-2.946,\ -2.03\}=-2.03$$

故取 $f_2(2)=c$．重复上述迭代运算，将 $n=57$ 次迭代运算结果列成下表。

表 6-3

迭代步数 n	$V_n(1)$	$V_n(2)$	$f_{n-1}(1)$	$f_{n-1}(2)$
0	0	0		
1	6	-3	b	b
2	7.78	-2.03	c	c
3	9.24	-0.65	c	c
4	10.54	0.65	c	c
5	11.71	1.82	c	c
6	12.76	2.87	c	c
7	13.70	3.81	c	c
8	14.55	4.66	c	c
9	15.32	5.42	c	c
10	16.01	6.12	c	c
15	18.55	8.66	c	c
20	20.05	10.16	c	c
25	20.93	11.04	c	c
30	21.44	11.55	c	c
35	21.76	11.87	c	c
40	21.94	12.05	c	c
45	22.06	12.17	c	c
50	22.11	12.22	c	c
55	22.16	12.26	c	c
57	22.16	12.27	c	c

不难验证 V_{57} 还不满足最优方程 $TV=V$，即 V_{57} 还不是最优值函数，因此还需继续迭代。其误差估计可通过（6.33）式得到：

$$\rho(V_{57}, V_{0.9}^*) \leqslant 0.9^{57}(1-0.9)^{-1}\rho(V_1, 0) \approx 0.1479$$

其中

$$\rho(V_1, 0)=\max_{i \in S}|V_1(i)-0|=6$$

上述估计得到的仅为误差上界，其真实误差事实上从例 6.9 已算得 $V_{0.9}(f^\infty)=(22.20, 12.31)$，故可得

$$\rho(V_{57}, V_{0.9}^*)=\max_{i \in S}|V_{57}(i)-V_{0.9}^*(i)|=0.04$$

在采用逐步逼近法求解时，一般来说，当迭代次数 n 足够大时，会得到一个最优策略，但怎样来判断所得的平稳策略为最优呢？我们建议，在迭代中，当一个决策函数重复出现时，就对 f_n^∞ 进行策略迭代算法中的策略求值运算，若求得的 $V_\beta(f_n^\infty)$ 满足最优方程 $TV=V$，就终止计算。因为，由定理 6.14（4），（5）可知 f_n^∞ 为 β 最优策略，$V_\beta(f_n^\infty)$ 为最优值函数，否则，即 $V_\beta(f_n^\infty)$ 不满足最优方程时，则需继续迭代，此时可取 $V_\beta(f_n^\infty)$ 作为新的 V_0，重新开始迭代，或者以 $V_\beta(f_n^\infty)$ 代替 V_{n+1}，转入步骤 2° 继续迭代。

比较上述三种算法，可以看出，策略迭代法当状态空间 S 所包含的元素个数 l 不太大时，是一种有效的算法，它比逐次逼近法、穷举法所需的计算量要小得多。但当 l 大时，由于每次迭代策略迭代法要解 l 个未知量的 l 个线性方程组，所需计算量甚多，而逐次逼近法则由于迭代规则简单，很适合计算机计算，因而有它的优越性。因此采用策略迭代法与逐次逼近法的混合算法将更有效。

习 题 六

1. 证明定理6.2中当仅有$b(t)$为随机和$b(t)$与$c(t)$均为随机时，T^0皆为凸集。

2. 对任何$x^0 \geqslant 0$，集合$T^0(x^0)=\{t \mid x^0$是规划（6.6）的解$\}$称为有效区域。试证明在规划（6.6）中只有$c(t)$是随机时，必有$T^0(x^0)$为凸集。

3. 考虑如下更一般的随机线性规划：

$$\min c(t, x) \tag{6.35}$$

$$\text{s.t} \quad A(x) \geqslant b$$

$$x \geqslant 0$$

若$A(x)$的各分量都是x的连续凹函数，对每一固定的x，目标函数$c(t, x)$是t的凹函数，同时对每一$t \in T$，$c(t, x)$又是x的凸函数。记规划（6.35）的最优值函数为$r(t, b)$，试证明$r(t, b)$是b的凸函数。

4. 构造一个马氏决策规划的应用问题，并指出其五元体中各元素在应用问题中的基本含义。

5. 考虑一台运行的设备，周期性地观察其状态，设每次观察时该设备必处于如下四种状态之一，各状态的含义如下：

0 一设备完好；

1 一设备稍微磨损，仍可用；

2 一设备严重磨损，仍可用；

3 一设备已损坏，不再能用。

设该设备运行的自然磨损规律具有无后效性，其状态的一步转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对于每个状态的可用行动（措施）集为

$A(0)=\{a\}$, $A(1)=\{a, c\}$, $A(2)=\{a, b, c\}$

$A(3)=\{c\}$

各措施的含义及费用如下，

a —不加措施，继续生产，无费用；

b —大修，修好后将返回到状态 1，修理费需400元；

c —换成新设备（与原设备质量相同）此时将返回到状态 0，需费用600元。其中修理费与换新费包括因修理与换新停产的损失费．在各生产状态，每单位时间的废品损失费如下（单位：元）。

状　态	0	1	2
废品损失	0	100	300

若仅考虑 4 个时段（$N=3$），求该应用问题的最优值函数与最优策略。

6．在习题 5 中，取折扣因子 $\beta=0.9$，用策略迭代法求折扣最优平稳策略及最优值函数（计算结果保留二位小数）。

7．在习题 5 中取折扣因子 $\beta=0.9$，用逐次逼近法求折扣最优平稳策略及最优值函数（计算结果保留二位小数）。

8．设一应用问题可用马氏决策规划的折扣模型来解决，今设该问题的状态，各状态的行动集以及相应的状态转移概率矩阵与报酬如下表。对 $\beta=0.1$，用逐次逼近法求解（计算结果取六位小数），并估计其近似解的误差。

状态 i	行动 d	转移概率		报　酬
		$P(1 \mid i, d)$	$P(2 \mid i, d)$	$r(i, d)$
1	a	1/2	1/2	1
	b	1/4	3/4	42/41
2	c	3/4	1/4	0

9．写出逐次逼近法与策略迭代法的混合算法的步骤，并取 $\beta=0.9$，对（1）习题 5 的实际系统，（2）例题6.10的实际系统，（3）习题 8 的实际系统分别作相应的求解（其计算结果的精度要求按各前述问题的要求）。

附录一　Stieltjes积分及其性质

本节不加证明的简要介绍 Stieltjes 积分的定义及其基本性质。

定义 7.1　设Δ表示用点x_0，x_1，…，x_n对区间$[a, b]$所作的一个划分，其中$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，用$\|\Delta\|$表示x_1-x_0，x_2-x_1，…，x_n-x_{n-1}中的最大值。若极限$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \|\Delta\|\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n} G(z_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})]$（其中$x_{i-1}\leqslant z_i\leqslant x_i$，$i=1, 2, \cdots, n$）存在且与各$z_i$的选择无关，则称此极限为函数$G(x)$对$F(x)$从$a$到$b$的Stieltjes积分，用符号$\int_a^b G(x)\mathrm{d}F(x)$记之。

S积分有如下存在定理与性质。

定理 7.1　若函数$G(x)$在$[a, b]$连续，$F(x)$为不减（不增）函数，则$\int_0^1 G(x)\mathrm{d}F(x)$存在。

定理 7.2　若积分$\int_a^b G(x)\mathrm{d}F(x)$存在，且$F(x)$在$[a, b]$内每点都具有导数$F'(x)$，且Rieman积分$\int_a^b G(x)F'(x)\mathrm{d}x$存在，则有

$$\int_a^b G(x)\mathrm{d}F(x)=\int_a^b G(x)F'(x)\mathrm{d}x$$

定理 7.3　若$F(x)$在$[a, b]$上为阶梯函数，$F(x)=I_c(x)$（$a\leqslant c\leqslant b$），$G(x)$在$[a, b]$上有定义且在$x=c$处连续，且$\int_a^b G(x)\mathrm{d}F(x)$存在，则有

$$\int_a^b G(x)\,\mathrm{d}F(x)=\int_a^b G(x)\,\mathrm{d}I_c(x)=G(c)$$

在上述S积分中，特殊地取$[a, b]$为$[0, 1]$，$F(x)$取为集中于$[0, 1]$的分布函数，则此S积分即为二人零和连续对策中所见到的各种期望值。关于S积分容易证明有如下性质：

定理 7.4 若定义在$[0, 1]$上的分布函数$F(x)=a_1I_{\alpha_1}(x)+a_2I_{\alpha_2}(x)+\cdots+a_nI_{\alpha_n}(x)$，其中$a_i\geqslant 0$，$I_{\alpha_i}(x)$为阶梯函数，$i=1, 2, \cdots n$，$\sum_{i=1}^{n} a_i=1$，$0\leqslant\alpha_i\leqslant\alpha_{i+1}\leqslant 1$，$i=1, 2, \cdots, n$，并设$G(x)$在$n$个点$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$处连续，则

$$\int_0^1 G(x)\mathrm{d}F(x)=a_1G(\alpha_1)+a_2G(\alpha_2)+\cdots+a_nG(\alpha_n)$$

定理 7.5 设$F(x)$为定义在$[0, 1]$上的分布函数，且下列各S积分均存在，则有

(1) $\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}F(x)=\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}F(x)+\int_a^1 G(x)\mathrm{d}F(x)\quad 0<a<1$；

(2) $\int_0^1 [G(x)+Q(x)]\mathrm{d}F(x)=\int_0^1 G(x)\mathrm{d}F(x)+\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}F(x)$；

(3) $\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}[F(x)+P(x)]=\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}F(x)+\int_0^1 G(x)\mathrm{d}P(x)$；

(4) $\int_0^1 kG(x)\,\mathrm{d}F(x)=k\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}F(x)$，$k$为实数；

(5) $\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}[kF(x)]=k\int_0^1 G(x)\mathrm{d}F(x)$，$k$

为实数;

（6）当$F(x)$非减时，$\left|\int_0^1 G(x)\,dF(x)\right| \leqslant \int_0^1 |G(x)|\,dF(x)$;

（7）$\int_0^1 dF(x)=F(1)-F(0)=1$;

（8）$\int_0^1 G(x)dF(x)=G(1)F(1)-G(0)F(0)-\int_0^1 F(x)dG(x)$

（9）如果在[0，1]中$G(x)\leqslant Q(x)$，且$F(x)$非减时，则$\int_0^1 G(x)\,dF(x)\leqslant\int_0^1 Q(x)dF(x)$

附录二　随机过程基础

本节将介绍随机过程的基本知识，并不加证明地简要介绍几种常见的随机过程：Poisson 流，生灭过程、齐次马氏过程的定义及最基本的一些性质，需要进一步了解随机过程知识的读者可参阅文献〔6〕、〔13〕、〔14〕、〔15〕、〔16〕。

（一）随机过程

在工程系统、社会经济系统、军事作战系统等各种领域内的系统分析中，首要的任务就是要搞清在系统运行过程中各种状态变化过程的概率特性。如进入排队系统中顾客总数随时间的变化过程、对每个不同顾客服务时间的变化过程、可靠性系统的状态变化过程等等。这种描述事物变化过程随机特性的概念就是随机过程。

定义 7.2　设$T\subset(-\infty,\ \infty)$为参数集，若对每个$t\in T$，均有一个随机变量$X(t)$与之对应，当$t$取遍参数集$T$中的每一值时，就将这一族定义在同一概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上、并依赖于$T$的随机变量集合称为随机过程（简称过程）。记作$\{X(t),\ t\in T\}$，或简写为$X_T$。并称随机过程$X_T$的取值范围为该过程的状态空间，记作$I$。

与随机变量的分布函数与数字特征概念相对应，随机过程也有类似的概念。考虑到在过程$\{X(t),\ t\in T\}$中对应于每个$t\in T$，$X(t)$为一随机变量，它对应一个分布函数$F(t)$，一个数学期望$E[X(t)]$和一个方差$D[X(t)]$，当t取遍参数集T中的每一值时，过程$\{X(t),\ t\in T\}$将分别对应一个一元分布函数族$\{F(t),\ t\in T\}$，一个期望函数$E[X(t)]$，$t\in T$和一个方差函数$D[X(t)]$，$t\in T$。它们从不同的侧面反映了

该随机过程的部分概率特性（要完整地描述过程的概率特性，需引入有穷维分布函数族的概念，在此从略）。

（二）Poisson 流

定义 7.3 一个取非负整数值的随机过程$\{M(t); t\geqslant 0\}$称为具有参数$\lambda>0$的 Poisson 流（又称 Poisson 过程），若其满足如下三条件：

（a） $P(M(0)=0)=1$

（b） 对于任何$0\leqslant s<t$，增量$M(s, t)=M(t)-M(s)$有参数为$\lambda>0$的 Poisson 分布。即对于$n=0, 1, 2, \cdots$有

$$P(M(s, t)=k)=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$$

（c） 过程$\{M(t), t\in T\}$具有独立增量性。即对于任一正整数n，任意$t_i\in T=[0, \infty)$，$t_1<t_2<\cdots<t_n$，随机变量$M(t_1, t_2)$，$M(t_2, t_3)$，$\cdots$，$M(t_{n-1}, t_n)$相互独立。其中$M(t_i, t_{i+1})=M(t_{i+1})-M(t_i)$，$i=1, 2, \cdots, n-1$。

根据上述定义容易求得有$E[M(t)]=\lambda t$，或有$\lambda=E[M(t)]/t$，若以$M(t)$表示$[0, t)$内到达排队系统的顾客总数，则参数λ表示单位时间内到达系统的平均顾客数，故又称为平均到达率。

Poisson 流具有如下基本性质。

定理 7.6 设$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \cdots$为一列取正值的随机变量序列，作$S_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i$，$M(t)=\max\{n: S_n<t\}$，则$\{M(t), t\geqslant 0\}$为具有参数$\lambda>0$的 Poisson 流的充要条件是$\{\tau_n, n=1, 2, \cdots\}$为独立同分布的随机变量序列，并有$\tau_n\sim E_1(\lambda)$，$n=1, 2, \cdots$。

若以 S_n 表示第 n 个到达系统顾客的到达时刻，$\tau_n=S_n-S_{n-1}$ 表示顾客的相继到达时间间隔，则由上述关系式知，$M(t)$表示在$[0, t)$内到达系统的顾客总数。于是定理 7.6 指出：M_T为 Poisson 流（参数为 $\lambda>0$）的充要条件为顾客的相继到达时间间隔 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \cdots$独立同分布，并服从期望值为 $1/\lambda$ 的同一负指数分布。

定理 7.7 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，且有$E(X_i)=\frac{1}{\lambda}(\lambda>0)$，$i=1, 2, \cdots, n$。作$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$，则有 $S_n \sim E_n(\lambda)$，即 S_n 服从具有参数 λ 的 n 阶 Erlang 分布。

定理 7.8 设$\{M_1(t), t\geqslant 0\}, \{M_2(t), t\geqslant 0\}, \cdots, \{M_n(t), t\geqslant 0\}$为 n 个相互独立且具有相同参数 $\lambda>0$ 的Poisson 流，作$M(t)=\sum_{i=1}^{n} M_i(t)$，则$\{M(t), t\geqslant 0\}$为具有参数 $n\lambda$ 的 Poisson 流。

（三）生灭过程

定义 7.4 一个具有可列状态空间 $I=\{0, 1, 2, \cdots\}$的随机过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$称为生灭过程，若其满足如下特性：

（a）对任何 $t\geqslant 0$，$\Delta t>0$ 有

$$P_{n,n+1}(t, t+\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=n+1|N(t)=n)=\lambda_n\Delta t+o(\Delta t) \quad \lambda_n>0, \ n=0, 1, 2, \cdots$$

（b）对任何 t，$\Delta t>0$ 有

$$P_{n,n-1}(t, t+\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=n-1|N(t)=n)=\mu_n\Delta t+o(\Delta t) \quad \mu_n>0, \ n=1, 2, \cdots$$

（c）令 $S=I-\{n-1, n, n+1\}$（当 $n=0$ 时，$S=\{0, 1\}$）有

$$\sum_{j\in S} P_{nj}(t, t+\Delta t) = \sum_{j\in S} P(N(t+\Delta t)=j \mid N(t)=n)$$
$$= o(\Delta t) \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

上述三个特性综合起来可作如下解释：在间隔为Δt的一小段时间区间内，忽略高阶无穷小项后，若以$N(t)$表示t时刻某群体的个数，则该群体个数n的状态转移只有三种可能：或者从n增加一个（群体出生一个），其概率为$\lambda_n\Delta t$；或者从n减少一个（群体死亡一个），其概率为$\mu_n\Delta t$；或者群体个数n保持不变，其概率由前知为$1-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t$（当$n=0$时有$\mu_0=0$）。生灭过程的命名理由即在于此。

由于上述生灭过程的状态个数为可列个，故称为可列状态生灭过程。类似地，可建立有限状态生灭过程的定义。即若上述随机过程的状态空间为$I=\{0, 1, 2, \cdots, k\}$，且也满足前述(a)、(b)，(c)三个条件，只不过n的范围改为$(a)\ n=0, 1, 2, \cdots, k-1$；$(b)\ n=1, 2, \cdots, k$；$(c)\ n=0, 1, 2, \cdots, k$。且当$n=k$时定义$S=I-\{k-1, k\}$，则该随机过程称为有限状态生灭过程。

在生灭过程中，参数λ_n与μ_n有其特殊的概率含义。显然，由前定义易知有

$$\lambda_n = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_{n,n+1}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\mu_n = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_{n,n-1}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

它表明λ_n与μ_n有瞬时转移速率的含义，故称为转移强度（或转移密度）。

在生灭过程的研究中，通常需要解决两大问题：第一，对任何时刻t，如何求概率$P(N(t)=n)$；第二，极限$\lim\limits_{t\to\infty} P(N(t)=n)=P_n$是否存在？$P_n$能否构成概率分布，即是否有等式

$\sum_{n\in I} P_n = 1$？若上述极限存在并构成概率分布，又应如何求 P_n？对前一个问题的求解称为生灭过程的瞬态分析，对后一个问题的求解称为生灭过程的稳态分析。由于瞬态分析的理论比较复杂，故在实际应用中通常讨论稳态分析（这对大多数应用问题的求解是允许的）。在稳态分析中，若极限 P_n 存在并构成概率分布，则称该生灭过程能达到统计平衡，并将概率分布 $\{P_n, \ n\in I\}$ 称为该生灭过程的统计平衡解。下述定理给出了生灭过程能达到统计平衡的一个充要条件。

定理 7.9 设 $\{N(t), \ t\geqslant 0\}$ 为生灭过程，则

（a）若 I 为有限集，则 N_T 恒有统计平衡解。

（b）若 I 为可列集，则下述两个条件是 N_T 能达到统计平衡的充要条件，它们是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty$$

其中 $\pi_0 = 1$，$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}$。

定理 7.10 若 $\{N(t), \ t\geqslant 0\}$ 为生灭过程（有限或可列状态），并知其能达到统计平衡，则该生灭过程的统计平衡解 P_n 可由下式计算

$$P_n = \pi_n P_0 \quad n\in I$$

$$P_0 = 1 / \sum_{n\in I} \pi_n$$

其中 $\pi_0 = 1$，$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}$

（四）齐次马氏过程

定义 7.5 一个具有离散状态空间 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 的随机过程 $X_T = \{X(t), \ t\in T\}$ 称为马氏过程，如果对任意正

整数 n 及 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ ($t_i\in T$)，恒有

$$P(X(t_n)=j\mid X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_{n-2})=i_{n-2},\ X(t_{n-1})=i)$$
$$=P(X(t_n)=j\mid X(t_{n-1})=i)$$

其中 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{n-2},\ \ i,\ \ j\in I$。

上式称为马氏性或无后效性。若以 t_1，t_2，$\cdots t_{n-2}$ 表示"过去"，t_{n-1} 表示"现在"，t_n 表示"将来"，则马氏性表述了在已知"现在"的系统状态条件下，系统"将来"的状态概率与"过去"是无关的。容易验证生灭过程满足马氏性，故知生灭过程是一类特殊的马氏过程。

当使用马氏过程来描述客观事物的变化过程时，由马氏性得知，该变化过程的转移规律可用转移概率 $P(X(s)=j\mid X(t)=i)$，$t<s$ 来刻划。一般来说，此转移概率是 s，t，i，j 的四元函数。特殊地，当此转移概率函数仅依赖于 $s-t$、i 及 j 时，则称该马氏过程为齐次马氏过程。在齐次马氏过程中，若设 $s-t=\Delta t>0$ 时，则有

$$P_{ij}(t,\ s)=P(X(s)=j\mid X(t)=i)=P(X(t+\Delta t)=j\mid X(t)=i)$$
$$=P_{ij}(\Delta t)$$

即在时间区间 $[t,\ t+\Delta t)$ 上的转移概率与该时间区间的起点 t 无关，仅依赖于时间间隔 Δt，"齐次"的含义即在于此。容易验证生灭过程也是齐次马氏过程的一种。

类似于生灭过程的研究，齐次马氏过程也要讨论其瞬态分析与稳态分析两类问题。而在稳态分析中，人们同样要解决如下两个问题：极限 $\lim\limits_{t\to\infty}P_{ij}(t)=P_j$ 是否存在？能否构成概率分布 $\sum\limits_{j\in I}P_j=1$？满足上述条件的概率分布 $\{P_j,\ j\in I\}$ 称为该马氏过程的平稳分布，又称稳态分布或统计平衡解。

对于任何一个实际系统来说，如能求出该系统的状态转移概

率 $P_{ij}(t)$，则令 $t\to\infty$ 后，上述两个问题的求解是不困难的。然而遗憾的是，对于大多数实际问题来说，人们很难求出 $P_{ij}(t)$ 的明显表达式，但好在可以根据试验、经验或理论推导来求得所谓的密度矩阵，从而可通过密度矩阵来解决上述问题。

定义 7.6 齐次马氏过程 $\{X(t),\ t\in T\}$ 的密度矩阵是指以极限 q_{ij} 为元素所构成的矩阵 $Q=(q_{ij})$ $i,\ j\in I$。其中 q_{ij} 由下式决定。

$$q_{ij}=\frac{\mathrm{d}P_{ij}(0)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)-P_{ij}(0)}{\Delta t}$$

它表示齐次马氏过程 X_T 在某时刻 t 从状态 i 转移到状态 j 的瞬时转移速率，故称为转移密度或转移强度。特殊地，当 $i=j$ 时，则定义 $q_{jj}=-q_j$，并称其为齐次马氏过程 X_T 对状态 j 的瞬时通过强度。

对有限状态空间的齐次马氏过程，转移密度有如下特性：

1° q_{ij}，q_j（$i,\ j\in I$）存在且有限。

2° $\sum\limits_{j\in I}q_{ij}=0$ 或 $q_i=\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}$，$i\in I$。

为了讨论系统的稳态分析，还需要状态的互通与不可分的概念，现介绍如下。

定义 7.7 设齐次马氏过程 X_T 有状态空间 I。若存在 $t>0$，使有 $P_{ij}(t)>0$，$i,\ j\in I$，则称该过程 X_T 可从状态 i 到达状态 j，并记作 $i\to j$。如果有 $i\to j$，同时又有 $j\to i$，则称状态 i 与 j 互通，记作 $i\leftrightarrow j$。若过程 X_T 的所有状态均互通，则称该齐次马氏过程 X_T 为不可分（或称不可约）。

状态互通这一概念是很易理解的。例如设 $X(t)$ 表示 t 时刻某商店的顾客数，取 $i=2$，$j=3$，则由于顾客的不断到来与离去，故总存在时间间隔 t_1 与 t_2，能使 $P_{23}(t_1)>0$ 和 $P_{32}(t_2)>0$。这就说明该齐次马氏过程(商店顾客数的变化过程)

的状态2与3是互通的。

下述定理给出了有限状态齐次马氏过程平稳分布存在的充分条件及求解方法。

定理7.11 设 $X_T=\{X(t), t\in T\}$ 为具有限状态空间的齐次马氏过程，$I=\{0, 1, 2, \cdots, k\}$。若 X_T 的所有状态均互通，则该过程 X_T 的平稳分布 $\{P_i, i\in I\}$ 必存在，且满足如下方程组：

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in I} P_k q_{ki}=0, & i\in I \\ \sum\limits_{i\in I} P_i=1 \end{cases}$$

其中 q_{ij} 为 X_T 的转移密度。

若 X_T 为可列状态的齐次马氏过程，且能达到统计平衡状态（或平稳分布存在），则可以证明其平稳分布仍满足上述方程组。但判别能否达到统计平衡状态的条件较为复杂，在此从略。

参考文献

〔1〕 徐光辉，随机服务系统，科学出版社，1980.

〔2〕 曹晋华，程侃，可靠性数学引论，科学出版社，1986.

〔3〕 王梓坤，概率论及其应用，科学出版社1979.

〔4〕 董泽清，排队论及其应用，中国科学院应用数学研究所，1983.

〔5〕 中国科学院计算中心概率统计组，概率统计计算，科学出版社，1979.

〔6〕 复旦大学，随机过程，人民教育出版社，1981.

〔7〕 赵玮、谢行皓、微电脑仿真及其应用、中国建筑工业出版社，1987.

〔8〕 董加礼、赵玮等，工程运筹学，北京工业大学出版社，1988.

〔9〕 于荫清、张华安，对策论—竞争的数学模型和应用，成都科技大学出版社，1987.

〔10〕 中国科学院数学研究所第二室，对策论讲义，人民教育出版社，1960.

〔11〕 董泽清，司克，马氏决策浅说，辽宁教育出版社，1986.

〔12〕 董泽清，马氏决策规划，中国科学院应用数学研究所，1982.

〔13〕 *Emanuel Parzen, Stochastic Processes, Department of Statistics, Stanford University*, 1962

〔14〕 *A. T. Bharucha-Reid, Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, Mcgraw-hill Book* 1960

〔15〕 *Foster, F. G. On the Stochastic Matrices Associated with Certian Queueing Processes, Ann, Math Statist Vol* 24, *pp* 355～360, 1953.

〔16〕 *Karlin S. A First Course in Stochastic Processes, A Cademic Press, New York*, 1966

〔17〕 *Gross D. and Harris, C. M., Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley and Sons, New York*, 1974.

〔18〕 *Kleinrock L, Queueing System, Vol I. II, Wiley, New York*, 1976

[19] *J. Murdoch, Queueing Theory Worked Examples and problems*, 1978

[20] *Barlow, R. F. and F. Proschan, Mathematical Theory of Reliability*, New York, Wiely, 1965.

[21] *C. E. Forsyche, C. B. Moler, Computer Solution of Linear Algebraic Syseem*, Prentice-Hall, 1967.

[22] *D. G. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[23] *J. V. Neumann, O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University, 1955.

[24] *Heilmann, W. R. Optimal Selections for Stochastic Linear Program*, Appl. Math. Opt. 4, 1978

[25] *Ronald A Howard, Dynamic Programming and Markov Processes* （李为政等译）上海科技出版社，1963.

[26] *J. C. C. Mckinsey, Introduction to the Theory of Games*，（高鸿勋等译）人民教育出版社，1960。

[27] *Vajda, S. the Theory of Games and Linear Programming*, Methuen, London, 1956.